

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

POLYNÔMES, ARBRES BICOLORÉS ET CACTUS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

NICOLAS PAQUIN

FÉVRIER 2011

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES	v
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET ORIGINES DE LA THÉORIE.	3
1.1 Quelques rappels sur les polynômes complexes	3
1.2 Notions élémentaires de topologie algébrique	6
1.3 Polynômes de Shabat et arbres	14
1.4 Rappels sur la théorie des espèces.	18
CHAPITRE II	
ARBRES PLANS BICOLORÉS ET POLYNÔMES DE SHABAT	27
2.1 Polynômes de Tchebychev classiques de première espèce.	27
2.1.1 Les polynômes de Shabat vus comme des polynômes de Tchebychev généralisés	29
2.1.2 Image inverse d'un segment	31
2.2 Équations pour trouver les polynômes de Shabat	32
2.2.1 Utilisation des fonctions symétriques et équations de Couveignes . .	33
2.2.2 Méthode de Newton-Raphson	39
2.2.3 Une autre méthode	44
CHAPITRE III	
CACTUS ET OBJETS ÉQUIVALENTS	49
3.1 Quelques définitions préalables	50
3.2 Cactus vs arbres plans bicolores	54
3.2.1 Bijection entre les cactus m -aires enracinés et non étiquetés contenant <p>p m-gones et les factorisations m-aires du p-cycle</p>	61
3.2.2 Bijection entre les cactus m -aires enracinés comportant p m -gones et les arborescences m -aires comportant p sommets	65
CHAPITRE IV	

EXPLORATIONS MAPLE	73
4.1 Procédure rootlocus	73
4.2 Programme servant à calculer et tracer l'image inverse d'un polygone par un polynôme	74
4.3 Procédure Newton pour l'approximation des solutions du système de Couveignes	78
CONCLUSION	89

—

—

—

—

—

—

TABLE DES FIGURES

1.1	$f : \theta \mapsto n\theta \pmod{2\pi}$	9
1.2	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = id$	22
1.3	On obtient une étoile, par homotopie, en rétrécissant les lacets	23
1.4	Cas non-ramifié, avant compactification.	23
1.5	Cas ramifié, après compactification.	24
1.6	L'image inverse, par un polynôme, d'un segment auquel on a ajouté l'infini.	25
1.7	L'espèce $F + G$	26
1.8	L'espèce $F \cdot G$	26
1.9	L'espèce $F \circ G$	26
2.1	Polynôme de Tchebychev pour $1 \leq n \leq 6$	46
2.2	À gauche, l'image inverse de l'intervalle $[0,1]$ par $P(z) = z^5$	47
2.3	À gauche, l'image inverse, à homéomorphisme près, de l'intervalle $[-1,1]$ par $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	47
2.4	À gauche, l'image inverse (à homéomorphisme près) de l'intervalle $[0,$ $-27/256]$ par $P(z) = z^4 - z^3$	47
2.5	À gauche, l'arbre bicolore est l'image inverse (à homéomorphisme près) du segment $[0, c]$	47
3.1	Polygones à m côtés	50

3.2	Un cactus avec diverses valeurs de m	51
3.3	Un 3-cactus	51
3.4	Il y a un 3-cycle de 3-gones	51
3.5	Un cactus 5-aire colorié de 1 à 5	52
3.6	Un 6-cactus enraciné	53
3.7	Une m -étoile	53
3.8	L'image inverse, par un polynôme.	54
3.9	$\mathbf{a}_{C_m, C}^{\bullet-\circ} = \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet} \cdot \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}$	56
3.10	$\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet} = XL_{m-1}(\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ})$	57
3.11	Étiquetage des m -gones	63
3.11	Étiquetage des m -gones (suite)	64
3.12	9-cactus	67
3.13	Arbre plan bicolore.	67
3.14	Arborescence quaternaire complète (admettant les sommets blancs.) . .	68
3.15	Arborescence quaternaire.	69
3.16	Construction d'une arborescence quaternaire	70
3.16	Construction d'une arborescence quaternaire (suite)	71
3.16	Construction d'une arborescence quaternaire (suite)	72
4.1	Arbres tracés d'après la procédure rootlocus appliquée à un polynôme	84
4.2	Polygone tracé d'après la procédure polygone.	85

4.3	Polygone simple tracé par la procédure <code>polygone</code>	86
4.4	Triangle obtenu de la procédure <code>Polygone</code> appliquée à un polynôme. . .	87
4.5	Cactus obtenu de la procédure <code>Cactus</code>	88

- - - - -

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur Gilbert Labelle. Merci pour ton encouragement, ton dévouement, ta patience, tes merveilleuses explications, ton intérêt, ta grande disponibilité, ton support et j'en passe. Sans toi ce mémoire n'aurait pu voir le jour. Ta passion des mathématiques est contagieuse et ta façon d'expliquer des plus éclairantes. Merci à mon codirecteur, Robert Bédard, pour sa très grande efficacité. Un grand merci à Jérôme Tremblay, encourageant, disponible, drôle, mais surtout efficace en ce qui a trait à mes millions de troubles de figures. J'aimerais aussi remercier l'équipe du LACIM et du CIRGET. En fait, merci à tous les professeurs, chargés de cours, secrétaires et techniciens. Merci à Radu Cebanu et Mathieu Anel, pour m'avoir guidé dans les méandres de la topologie algébrique.

Un énorme merci à Judite Chauvin, ma copine, pour ton écoute, tes bons conseils, ta joie de vivre,..., ta patience, mais surtout, ton amour. Un immense merci à ma mère et mon père, pour m'avoir soutenu pendant toutes ces années. Merci à mon frère Mathieu, pour son écoute et ses encouragements. Un grand merci à tous les travailleurs du Québec. Sans eux, les bourses n'existeraient pas. Finalement, merci à tous mes amis qui ont toujours été là pour moi.

Mille mercis.

Nicolas Paquin

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser aux graphes obtenus en considérant l'image inverse d'un polygone (en particulier d'un segment) dont les sommets sont les valeurs critiques d'un polynôme. Nous allons commencer par des rappels de notions préliminaires sur les polynômes complexes, la topologie algébrique et la théorie des espèces. Ensuite, nous allons voir le lien entre les arbres plans bicolores et les polynômes de Shabat, qui sont des polynômes ayant au plus deux valeurs critiques, mis à part l'infini. Subséquemment, nous étudierons quelques notions portant sur les cactus. Finalement nous bouclerons le tout par une exploration, à l'aide du logiciel Maple, des concepts élaborés dans les chapitres précédents.

MOTS-CLÉS : point critique, valeur critique, revêtement, polynôme de Shabat, arbre plan bicolore, cactus, constellation, fonction symétrique, espèce de structures, itération de Newton-Raphson.

INTRODUCTION

Lors d'un cours de combinatoire animé par monsieur François Bergeron, j'ai eu à faire un exposé sur un sujet combinatoire. J'avais choisi les cactus. L'origine et les balbutiements de la théorie restaient quelque peu nébuleux, mise à part, que les cactus sont aussi connus sous le nom d'arbres de Husimi, faisant référence à Kôji Husimi et de ses travaux de physique, notamment en théorie de la condensation en mécanique statistique. Dans les manuels de combinatoire, on m'apprit que les cactus provenaient d'un engouement pour la classification topologique des polynômes complexes, en particulier, avec Hurwitz (Hurwitz, 1891). Dans les livres traitant sur cette classification, je notais qu'il y a de nombreuses applications combinatoires. Le lien entre les deux domaines restait, pour moi, obscur. C'est ce qui m'a incité à rédiger ce mémoire qui fait le lien entre les deux théories et approfondit quelques notions sur le sujet. La principale référence qui a inspiré le présent ouvrage est la monographie de Zvonkin (Lando et Zvonkin, 2004).

Nous allons d'abord, dans le premier chapitre, donner des rappels sur les polynômes complexes : racines, multiplicités, points critiques, valeurs critiques et autres. Des rappels sur la topologie algébrique font aussi partie du premier chapitre. C'est par la topologie algébrique que nous allons pouvoir comprendre l'essence de la théorie des dessins d'enfants. Les dessins d'enfants furent introduits par Alexander Grothendieck (Grothendieck, 1997). Ce ne sont pas des dessins réalisés par des enfants, mais plutôt des dessins ayant put être dessinés par des enfants, tel les arbres, graphes plans, cactus, etc. Ce premier chapitre se termine par des notions de base en théorie des espèces, afin de nous permettre d'aborder les cactus sous un angle combinatoire. La théorie des espèces, inventée par André Joyal (Joyal, 1981), tira ses origines de la théorie des catégories (Mac Lane, 1998). La topologie algébrique nous donne certaines règles applicables aux polynômes complexes. À partir de polynômes, nous pouvons obtenir des arbres bico-

lorés. De ces arbres, nous pouvons obtenir des cactus. Ces cactus seront dénombrés et mis en bijection avec divers objets mathématiques, par le biais de la théorie des espèces.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser aux polynômes de Shabat et de Tchebychev classiques de première espèce. Nous allons voir aussi comment, d'un segment formé de deux valeurs critiques, nous pouvons obtenir un arbre plan bicolore. Nous allons aussi donner les équations de base pour trouver les polynômes de Shabat, en particulier, les équations de Couveignes (Couveignes, 1994). Il s'en dégage quelques méthodes, en particulier l'itération de Newton-Raphson. Le chapitre suivant va être consacré aux cactus et à leurs applications combinatoires. Nous allons montrer qu'il existe des bijections entre les cactus et les arborescences bicolorées, ainsi qu'avec les factorisations m -aires d'un p -cycle. Finalement, nous allons présenter quelques explorations Maple en décrivant plusieurs procédures permettant de trouver les polynômes de Shabat et de tracer des arbres et des cactus liés à des polynômes complexes. Notons que notre présentation détaillée de la méthode de Newton-Raphson dans le contexte du calcul des polynômes de Shabat est inédite. Il en est de même pour les algorithmes que nous avons développés en Maple. Les figures ont été produites en utilisant Tikz dans LaTeX ainsi que Maple et Inkscape.

CHAPITRE I

NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET ORIGINES DE LA THÉORIE.

Nous présentons quelques notions de base sur les polynômes complexes, la topologie algébrique et la théorie des espèces.

1.1 Quelques rappels sur les polynômes complexes

Théorème 1.1.1. (Théorème fondamental de l'algèbre). *Tout polynôme à coefficients complexes de degré ≥ 1 possède au moins une racine complexe.* \square

De ce théorème découle le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.2. *Tout polynôme de degré n se factorise de façon unique comme suit,*

$$p(z) = c(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_k)^{m_k}$$

où c est une constante, m_i est la multiplicité de la racine z_i pour $1 \leq i \leq k$, $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ et les z_i les racines distinctes de $p(z)$ pour $1 \leq i \leq k$.

Démonstration. Soit $p(z)$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Par le théorème fondamental de l'algèbre, il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $p(z_1) = 0$. On effectue la division euclidienne de $p(z)$ par $(z - z_1)$. On obtient, $p(z) = (z - z_1)q(z) + r(z)$, où $q(z)$ et $r(z)$ sont des polynômes en z . Le degré de $(z - z_1)$ est strictement inférieur au degré de $r(z)$ qui est le reste de la division. Comme le degré de $(z - z_1)$ est un, alors le degré de $r(z)$ vaut zéro, donc $r(z)$ est une constante, disons a . Remplaçons z par z_1 . On a que $p(z_1) = (z_1 - z_1)q(z_1) + a$,

mais $p(z_1) = 0$, alors $a = 0$. Donc, si z_1 annule le polynôme $p(z)$, alors $z - z_1$ est facteur de $p(z)$ et on a $p(z) = (z - z_1)q(z)$. Si le degré de $q(z)$ est plus grand que un, on réitère le procédé, sinon, on a le résultat escompté. Montrons maintenant que la factorisation est unique. Supposons qu'il existe deux factorisations de $p(z)$. On a $c_1(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_k)^{m_k} = c'_1(z - z'_1)^{m'_1}(z - z'_2)^{m'_2} \dots (z - z'_{k'})^{m'_{k'}}$ pour $k' \in \mathbb{N}$. Évaluons les deux côtés de l'équation en z_1 , $0 = c'_1(z_1 - z'_1)^{m'_1}(z_1 - z'_2)^{m'_2} \dots (z_1 - z'_{k'})^{m'_{k'}}$. Une possibilité s'impose; un des $z'_i = z_1$ pour $1 \leq i \leq k'$. Il en va de même pour la multiplicité des racines, elles se doivent d'être égales, car sinon, on n'obtiendrait pas zéro. Un fois que l'on a identifié un des z'_i , on divise par celui-ci afin de le faire disparaître. On refait le processus jusqu'à ce qu'il reste deux constantes c et c' nécessairement égales et $k = k'$. \square

On peut dire que le plupart du temps un polynôme s'écrit sous la forme $p(z) = c(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_k)^{m_k}$ où chaque monôme est de multiplicité un. Par exemple, prenons un polynôme de degré deux. $P(z) = az^2 + bz + c$ où $z \in \mathbb{C}$ et a, b, c sont des constantes. On a deux racines, disons z_1 et z_2 .

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On a que $z_1 = z_2 \Leftrightarrow b^2 = 4ac \Leftrightarrow b = 2\sqrt{ac}$, ce qui est assez rare pour des valeurs prises au hasard.

Définition 1.1.3. Soit P un polynôme à coefficients complexes. Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P'(z_0) = 0$ est appelé un point critique du polynôme P . La valeur $P(z_0) = w$ du polynôme évalué au point critique z_0 est appelée valeur critique. On dit qu'un point critique z_0 est d'ordre k (ou de multiplicité k), $k \geq 2$ si à ce point $P'(z_0) = 0$, $P^{(2)}(z_0) = 0 \dots P^{(k-1)}(z_0) = 0$ et $P^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Notons cependant que l'infini est toujours considéré comme un point critique d'ordre n , de valeur critique ∞ , où n est le degré du polynôme. En effet, lorsque z parcourt un petit cercle centré en un point critique $z_0 \in \mathbb{C}$ d'ordre k , $P(z)$ parcourt approximativement k fois un petit cercle autour de la valeur critique $P(z_0)$. Comme un grand cercle centré

à l'origine est considéré comme un « petit » cercle centré à l'infini, l'image par P de ce grand cercle est approximativement un autre grand cercle parcouru n fois, où n est le degré du polynôme. C'est pour cette raison que l'on considère l'infini comme un point critique d'ordre n .

Exemple 1.1.4. Prenons le polynôme $P(z) = z^3 + 1$. La dérivée de $P(z)$ est $P'(z) = 3z^2$. On a donc que $z = 0$ est un point critique de $P(z)$. Sa valeur critique est $1 = P(0)$. Trouvons maintenant la multiplicité du point critique. On a que $P^{(2)}(z) = 6z$ et $P^{(3)}(z) = 6$, alors $P^{(2)}(0) = 0$ et $P^{(3)}(0) = 6$. Comme la dérivée troisième n'est pas nulle, alors le point critique du polynôme P est de multiplicité trois.

Considérons maintenant un exemple qui va nous intéresser particulièrement. Mais d'abord notons que pour toute fonction f de \mathbb{C} vers \mathbb{C} , en particulier pour les polynômes, trouver l'image inverse revient à trouver des racines. En effet, pour w dans l'image, $p^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} | p(z) = w\} = \{z \in \mathbb{C} | p(z) - w = 0\} = \{z \in \mathbb{C} | p_w(z) = 0\}$ si on renomme $p(z) - w$ par $p_w(z)$.

Exemple 1.1.5. Soit $p(z) = z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Trouvons l'image inverse de w par ce polynôme, $p^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} | p(z) = w\} = \{z \in \mathbb{C} | z^n = w\} = \{z \in \mathbb{C} | z^n - w = 0\}$. Trouver l'image inverse, c'est trouver les racines du polynôme $z^n - w$. Ces racines sont les racines n -ièmes de w , pour $n \geq 1$. Soit a une telle racine de multiplicité $m \geq 1$. Trouvons les points critiques, les valeurs critiques et leurs multiplicités. Comme $p_w(z) = p(z) - w$, alors $p'_w(z) = (p(z) - w)' = p'(z)$. Soit a un point critique d'ordre m . On a $a^n = w$, $na^{n-1} = 0$, $n(n-1)a^{n-2} = 0$, ..., $n(n-1) \dots (n-m+2)a^{n-m+1} = 0$, $n(n-1) \dots (n-m+1)a^{n-m} \neq 0$. De ceci, on en déduit que $a = 0$ et $w = 0$. Donc, $a = 0$ est une racine de multiplicité $m \geq 1$, en fait $a = 0$ est une racine de multiplicité n . En effet, il faut dériver n fois pour que la dérivée en ce point ne soit pas 0. On a $p_w^{(n)}(z) = n!a^0 = n! \neq 0$. Analysons maintenant le cas $w \neq 0$. Une question toute naturelle à se poser est : On a $z^n = w$ dans quelles circonstances ? Pour y répondre, passons au coordonnées polaires en posant $z = \rho e^{i\theta}$ et $w = re^{i\alpha}$, où $r \neq 0$. Ainsi, z^n se réécrit comme suit : $z^n = \rho^n e^{in\theta} = re^{i\alpha}$, α et θ des inconnues. Ainsi, On a donc que

$$\begin{aligned}
z^n = w &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \alpha \bmod(2\pi) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}}, \\ \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \quad \text{où } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a un cas particulier bien connu, c'est le cas où $r = 1$ et $\alpha = 0$, alors $\rho = 1$ et $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. Il s'agit des racines n -ièmes de l'unité.

Nous aurons besoin du théorème suivant lors du calcul de l'itération de Newton-Raphson appliquée à la recherche des polynômes de Shabat.

Théorème 1.1.6. (Formule d'interpolation de Lagrange) *Soient x_1, x_2, \dots, x_k des nombres complexes distincts et y_1, y_2, \dots, y_k des nombres complexes quelconques. Alors il existe un unique polynôme $P(z)$ de degré plus petit ou égal à $k-1$, tel que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \dots, P(x_k) = y_k$, à savoir $P(z) = \sum_{j=1}^k y_j \frac{(z-x_1)\cdots(z-x_j)\cdots(z-x_k)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_i)\cdots(x_j-x_k)}$. \square*

Lorsqu'on munit d'un chapeau un facteur d'un produit, cela signifie que l'on omet ce facteur. Pour notre part, nous allons aussi utiliser la notation $P(z) = \text{Lagrange}([x_1, x_2, \dots, x_k], [y_1, y_2, \dots, y_k], z)$.

1.2 Notions élémentaires de topologie algébrique

La section suivante porte sur quelques notions de topologie algébrique tirées de (Munkres, 1999) et (Lando et Zvonkin, 2004). La topologie algébrique est le fondement mathématique de cette belle théorie qu'est celle des « dessins d'enfants », proposée par Alexander Grothendieck, dans (Grothendieck, 1997). Sans elle, on ne pourrait atteindre les résultats combinatoires des prochains chapitres. Dans un premier temps, nous allons définir quelques notions permettant de comprendre pourquoi, par exemple, que d'un segment on peut obtenir un arbre et d'une étoile on peut obtenir une constellation.

Dans ce qui suit, \mathbb{C} désigne le plan complexe et S^2 désigne la sphère de Riemann, c'est-à-dire, le prolongement du plan complexe en un espace compact par l'ajout d'un point à l'infini. La sphère de Riemann est un cas particulier de surface de Riemann, c'est-à-dire, une surface localement homéomorphe au plan complexe (les changements de cartes se faisant par des fonctions analytiques).

Définition 1.2.1. (Connexité par arcs) Soit X un espace topologique. Soient, x et y dans l'espace X . Un *chemin* dans X de x à y est une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow X$ de l'intervalle fermé $[a, b]$ de la droite réelle vers X , telle que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. L'espace X est dit *connexe par arcs*, si quels que soient les points x et y dans X , il existe un chemin dans X de x à y .

Définition 1.2.2. (Homotopie) Deux chemins f_0 et f_1 de $I = [0, 1]$ dans X et de x_0 à x_1 sont homotopes s'il existe une fonction continue $F : I \times I \rightarrow X$ telle que $F(s, 0) = f_0(s)$, $F(s, 1) = f_1(s)$, $F(0, t) = x_0$ et $F(1, t) = x_1$ pour tout $s, t \in I$. On appelle F une homotopie de chemins de f_0 vers f_1 . Si f_0 est homotope à f_1 on le note $f_0 \simeq f_1$.

De manière plus intuitive, f_0 est homotope à f_1 si on peut continûment déformer f_0 dans f_1 , tout en demeurant dans l'espace X .

Lemme 1.2.3. *La relation \simeq est une relation d'équivalence.* □

On dénote par $[f]$ la classe d'équivalence de f .

Définition 1.2.4. Si f est un chemin dans X , de x_0 à x_1 et g un chemin dans X , de x_1 à x_2 , on définit le produit $f * g$ de f et g comme étant le chemin h donné par les équations

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{pour } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s - 1) & \text{pour } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Cette définition signifie simplement que les chemins f et g sont mis bout-à-bout pour former le chemin h de x_0 à x_2 .

Définition 1.2.5. (Groupe fondamental) Soit X un espace topologique et soit x_0 un point de X . Un chemin dans X , qui commence et se termine en x_0 est appelé un lacet en x_0 . L'ensemble des classes d'homotopie de lacets en x_0 et muni de l'opération $*$ est appelé le *groupe fondamental* de X par rapport au point x_0 . On le note $\pi_1(X, x_0)$. La fonction h est bien définie et continue, c'est un chemin de x_0 vers x_0 . Par ailleurs, le produit $*$ induit une opération bien définie sur les classes d'équivalence d'homotopie définie par l'équation

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Définition 1.2.6. (Revêtement non – ramifié) Soit X et Y deux espaces topologiques connexes par arcs et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue. Le triplet (X, Y, f) est appelé *revêtement non-ramifié* ou simplement *revêtement*, de Y par X , si pour n'importe quel $y \in Y$, il existe un voisinage V de y tel que l'image réciproque $f^{-1}(V) \subset X$ est homéomorphe à $V \times S$, où S est un ensemble discret. On appelle la fonction f , la projection de X vers Y . Les éléments connexes de la préimage $f^{-1}(V)$ sont appelés les couvertures du revêtement au-dessus de V . La préimage $f^{-1}(y)$ est appelée la fibre de y . La cardinalité de S est appelée le degré du revêtement et on le note $\deg(f)$. Si $\deg(f) = n$, alors on dira que le revêtement est un n -revêtement et si $n < \infty$, on dit que f est un revêtement fini. Par abus de notation, on n'écrit pas un n -revêtement, mais seulement un revêtement.

Exemple 1.2.7. Prenons pour X et Y le cercle unité S^1 . On considère un point sur le cercle avec θ comme angle au centre par rapport à l'axe des x . Considérons la fonction

$$S^1 \rightarrow S^1$$

$$f : \theta \mapsto n\theta \pmod{2\pi}$$

La fonction f est un revêtement non-ramifié de degré n . Voir la figure 1.1, où $n = 8$.

Il est bon de noter que si on prend un point $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, alors le revêtement peut s'écrire $f : z \mapsto z^n$

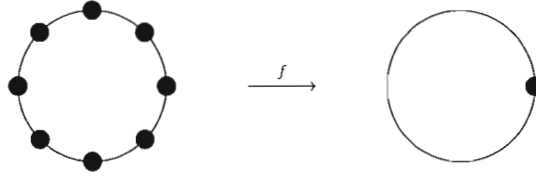


Figure 1.1 $f : \theta \mapsto n\theta \mod 2\pi$

Plus généralement, tout polynôme P induit un revêtement non-ramifié, $X \rightarrow Y$ où $X = \mathbb{C} \setminus \{\text{Points critiques de } P\}$ et $Y = \mathbb{C} \setminus \{\text{Valeurs critiques de } P\}$.

Définition 1.2.8. (Monodromie) Soit (X, Y, p) un revêtement et $\gamma \in \pi_1(Y, y_0)$ un lacet quelconque. Chaque lacet induit une bijection $g : E \rightarrow E$, où E est la fibre de y_0 . En effet, on a que γ est une courbe orientée dans Y , alors $p^{-1}(\gamma)$ est formé de $|S|$ courbes orientées dans X et où S est une somme de composantes connexes. De plus, pour tout $\gamma \in \pi_1(Y, y_0)$, $p^{-1}(\gamma)$ va d'un point de E vers un point de E . Donc g est bien une fonction de E dans E . Enfin, puisque tout les $\gamma \in \pi_1(Y, y_0)$ sont inversibles, alors la fonction g est aussi inversible. De tout cela, on en déduit un homomorphisme de groupe

$$\psi : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow G$$

$$\gamma \mapsto g,$$

où le produit des lacets dans $\pi_1(Y, y_0)$ correspond à la composition des bijections. Le groupe de ces bijections $g : E \rightarrow E$, noté G , est appelé le groupe de *monodromie*.

Proposition 1.2.9. Soit $x \in E$ et G_x le sous-groupe de $\pi_1(Y, y_0)$ qui stabilise x . Les classes à droite de G_x sont en bijection avec E .

Démonstration. On considère la fonction

$$\varphi : \pi_1(Y, y_0)/G_x \rightarrow E$$

$$G_x[\alpha] \mapsto [\alpha]x$$

On note $[\alpha]$ la classe d'homotopie du lacet α et $[\alpha]x$, l'extrémité de α relevé à partir de x . La fonction φ ne dépend pas de G_x , mais seulement de $[\alpha]$. En effet, pour

$\gamma \in G_x$, $[\gamma\alpha]x = [\alpha][\gamma]x$, par action à droite. Comme $\gamma \in G_x$, alors $[\gamma\alpha]x = [\alpha]x$. Montrons maintenant que φ est une bijection. Commençons par l'injectivité. On suppose $G_x[\alpha]x = G_x[\bar{\alpha}]x$. Comme φ ne dépend pas de G_x , on a $[\alpha]x = [\bar{\alpha}]x$, alors il existe $g \in G_x$ tel que $[\bar{\alpha}] = g[\alpha]$ et donc que $G_x[\alpha] = G_x[\bar{\alpha}]$. On a bien que φ est injective. À présent, concentrons-nous sur la surjectivité. Soit $x_1 \in E$, montrons qu'il existe $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)/G_x$ tel que $[\gamma]x_0 = x_1$. On prend $\tilde{\gamma}$ un chemin dans X tel que x_0 est relevé à x_1 . C'est possible puisque X est connexe par arc. On a que $\varphi(\tilde{\gamma}) = \bar{\gamma}$ un lacet dans $\pi_1(Y, y_0)$. Donc que $\bar{\gamma}(x_0) = \bar{\gamma}(x_1)$ et ainsi il existe $[\bar{\gamma}]$ tel que le relèvement de x_0 donne x_1 . Autrement dit, $[\bar{\gamma}]x_0 = x_1$. On a bien que φ est surjective. Donc φ est donc une bijection. \square

Il est intéressant de remarquer que G_x est isomorphe à $\pi_1(X, x)$ puisque G_x est formé de classe de lacets dans $\pi_1(Y, y_0)$ dont les relèvements sont des lacets dans X , joignant x à x .

Plaçons-nous maintenant sur la sphère de Riemann S^2 avec k perforations. Notons $R = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ l'ensemble des k perforations et soit $Y = S^2 \setminus R$. On considère l'orientation anti-horaire sur la sphère. On a que $\pi_1(Y, y_0) = F_{k-1}$, le groupe libre à $k-1$ générateurs, où $y_0 \in Y$. Par contre, il va s'avérer plus utile de considérer le groupe libre sur k générateurs $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ et une relation $g_1 g_2 \cdots g_k = id$ où $g_i \in G$ correspond à $\gamma_i \in \pi_1(Y, y_0)$. C'est plus utile au sens où à chaque perforation on associe un générateur. Par exemple, prenons $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = id$. On peut représenter cette relation par la figure 1.2.

Notons que l'on impose l'orientation anti-horaire et fixons l'ordre des lacets. La figure 1.3, illustre comment on rétrécit les lacets par homotopie. Nous avons rétréci les lacets afin d'obtenir un seul chemin entre y_0 et une perforation. Le graphe ainsi obtenu s'appelle un graphe étoile. On dit aussi, une k -étoile, ou une étoile de base du revêtement. De tout ceci, on a que le produit de lacets $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k \in \pi_1(S^2 \setminus R, y_0)$ est un lacet qui fait le tour de toutes les perforations. Il suffit, par homotopie, de déformer les lacets. Comme on est sur la sphère, le produit est rétractable et donc $\gamma = id$.

Définition 1.2.10. (Constellation) Soit \mathbb{S}_n le groupe des permutation de n éléments.

Une constellation est une suite de permutations (g_1, g_2, \dots, g_k) , où $g_i \in \mathbb{S}_n$, qui satisfait les conditions suivantes. Premièrement, le groupe $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$, engendré par g_1, g_2, \dots, g_k , agit transitivement sur l'ensemble E des n points, c'est-à-dire, pour deux éléments $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$. Deuxièmement, $g_1 g_2 \cdots g_k = id$, avec la composition de gauche à droite.

Associons maintenant une constellation à chaque revêtement $p : X \rightarrow S^2 \setminus R$ de degré fini n . À chaque lacet $\gamma \in \pi_1(Y, y_0)$, on associe une permutation $g_i \in \mathbb{S}_n$ qui agit sur la fibre $E = p^{-1}(y_0)$. Les permutations (g_1, g_2, \dots, g_k) engendrent le groupe de monodromie du revêtement. On a donc l'homomorphisme de groupe

$$\psi : \pi_1(S^2 \setminus R, y_0) \rightarrow G$$

$$\gamma_i \mapsto g_i$$

pour $i = 1, 2, \dots, k$. Comme on a que $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k = id \in \pi_1(S^2 \setminus R, y_0)$, alors par homotopie et parce que les extrémités sont fixes, on a $g_1 g_2 \cdots g_k = id \in G$. De plus, puisque X est connexe par arc, alors G agit transitivement sur E . Ainsi à partir d'un revêtement connexe on peut obtenir une constellation.

Remarquons qu'une constellation est un ensemble d'étoiles! Nous n'allons pas étudier les constellations en général, mais plutôt un cas particulier, les cactus.

Définition 1.2.11. (Cactus) Un cactus est une constellation planaire $[g_1, g_2, \dots, g_{k-1}, c^{-1}]$, où c est une permutation cyclique. C'est-à-dire, $c = g_1 g_2 \cdots g_{k-2} g_{k-1} = (1, 2, \dots, n)$, le cycle canonique.

Nous allons voir au chapitre 3 quelques propriétés des cactus, ainsi qu'une façon différente de définir les cactus. Un revêtement non-ramifié permet d'obtenir un autre revêtement, dit ramifié, à l'aide de la construction suivante.

Construction 1.2.12. Commençons par ajouter à la sphère perforée ses points manquants y_1, y_2, \dots, y_k afin de compactifier celle-ci. La surface topologique Y devient S^2 . Par contre, les points y_1, y_2, \dots, y_k n'ont pas de préimage dans X . Ajoutons maintenant

ces préimages dans X . Pour chaque $y_i \in Y$, où $i = 1, \dots, k$ on ajoute dans X autant de points qu'il y a de cycles dans la permutation g_i . On dit que ces points sont les préimages des point y_i . À ces points de la préimage, on attribue la multiplicité égale à la longueur des cycles correspondants. Fixons y_i et un cycle de longueur d dans g_i . On peut représenter localement cette construction comme aux figures 1.4 et 1.5. Avant la compactification, un petit voisinage de y_i sur la sphère perforée est un petit disque perforé $V \subset Y$. Il existe un disque non perforé $U \subset X$, correspondant au cycle préétabli dans la construction, qui donne un revêtement de V . Ce revêtement est de degré d . Notons ce revêtement f . Cette fonction est continue. On a que x est de multiplicité d si pour n'importe quel $y' \in Y$ proche de $y = f(x)$, $y \neq y'$, parmi les n éléments de $f^{-1}(y')$ il existe exactement d points proches de x . L'espace X est encore une surface. Avant d'ajouter des points nous avions un revêtement non-ramifié. Par cette construction, les voisinages des points ajoutés sont homéomorphes à un disque ouvert. En plus d'être une surface, le fait d'y avoir bouché les trous, rend cette surface compacte. Cette surface est orientable. En effet, l'orientation dans un voisinage $U \subset X$ peut être relevée de l'orientation dans $V = f(U)$ sur la sphère.

Définition 1.2.13. (Revêtement ramifié) Soit X une surface compacte et soit S^2 la sphère de Riemann. Une fonction continue $f : X \rightarrow S^2$ est appelée un *revêtement ramifié* de S^2 par X s'il y a un ensemble fini de points $R = \{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq S^2$ tel que f est obtenue par un revêtement non-ramifié de $S^2 \setminus R$ par la construction ci-dessus. Le degré n du revêtement non-ramifié par lequel est obtenu le revêtement ramifié est aussi appelé le degré du revêtement ramifié et on le note $\deg f$. Les points y_1, y_2, \dots, y_k sont les valeurs critiques de f , aussi appelés, points de ramification du revêtement.

On a déjà obtenu une constellation à partir d'un revêtement. Inversement, on a le résultat suivant.

Proposition 1.2.14. *Pour toute constellation $C = [g_1, g_2, \dots, g_k]$ il existe un revêtement non-ramifié de la sphère perforée correspondant à C .*

Démonstration. Soit E l'ensemble sous-jacent des permutations de la constellation C et soit $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$. On considère la fonction $\pi_1(S^2 \setminus R, y_0) \rightarrow G$. Cette fonction associe les permutations g_i aux générateurs γ_i . Comme la seule restriction $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k = id$ est aussi valable pour les images g_1, g_2, \dots, g_k dans G , cette fonction se prolonge à un unique homomorphisme de groupes. Pour un point $x \in E$, soit $M_x \subset \pi_1(S^2 \setminus R, y_0)$, la préimage du stabilisateur de x dans G . Alors, M_x détermine un revêtement fini de $S^2 \setminus R$. De plus, comme $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$ agit transitivement sur E , le revêtement est connexe. \square

On en déduit un revêtement ramifié, en compactifiant la sphère, comme on a vu précédemment.

Théorème 1.2.15. (Théorème d'existence de Riemann) *On suppose qu'une étoile de base est fixée dans S^2 et que la suite de ses sommets (feuilles) soit $R = (y_1, y_2, \dots, y_k)$. Alors toute constellation $(g_1, g_2, \dots, g_k), g_i \in S_n$, il existe une surface de Riemann compacte X et une fonction méromorphe¹ $f : X \rightarrow S^2$, telle que y_1, y_2, \dots, y_k sont les valeurs critiques de f et g_1, g_2, \dots, g_k sont les permutations de la monodromie correspondante. Le revêtement ramifié $f : X \rightarrow S^2$ est indépendant du choix de l'étoile de base dans une classe d'homotopie donnée et est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. (Esquisse) Comme nous avons vu dans la proposition 1.2.14, une constellation détermine un revêtement ramifié de $f : X \rightarrow S^2$. Il nous faut seulement ajouter une structure complexe sur X , de sorte que f soit une fonction méromorphe. En perforant S^2 aux valeurs critiques y_i , on fait de f un revêtement non-ramifié $f : X \setminus f^{-1}(R) \rightarrow S^2 \setminus R$. La structure complexe sur $X \setminus f^{-1}(R)$ est reconstruite par relèvement de la structure complexe de $S^2 \setminus R$. Si $x_0 \in f^{-1}(y_i)$ est une préimage d'une valeur critique, alors on peut introduire une coordonnée complexe z dans un voisinage de x_0 en posant $z = (f(x) - f(x_0))^{\frac{1}{d}}$, où d est le degré de f au point x_0 . Tout point

1. Une fonction méromorphe sur X est une fonction analytique partout dont l'infini est possiblement une valeur critique.

dans ce voisinage de x_0 admet un voisinage assez petit de sorte que la fonction f dans ce voisinage soit un homéomorphisme. Dans ce petit voisinage, les deux coordonnées coïncident. \square

1.3 Polynômes de Shabat et arbres

Définition 1.3.1. (Polynôme de Shabat) Un polynôme avec au plus deux valeurs critiques, sans compter l'infini, est appelé un polynôme de Shabat.

Définition 1.3.2. (Équivalence entre polynômes de Shabat) Soit P et Q deux polynômes de Shabat, ayant comme valeurs critiques y_1, y_2 et z_1, z_2 . On dit que les deux paires $(P, [y_1, y_2])$ et $(Q, [z_1, z_2])$ sont équivalentes s'il existe des constantes $A, B, a, b \in \mathbb{C}$ avec $A \neq 0$ et $a \neq 0$ tel que

$$Q(x) = AP(ax + b) + B \text{ et } z_1 = Ay_1 + B, z_2 = Ay_2 + B.$$

Par abus de langage, nous dirons que P et Q sont équivalents, au lieu des deux paires $(P, [y_1, y_2])$ et $(Q, [z_1, z_2])$.

Définition 1.3.3. (Arbre plan bicolore) Un arbre, bicolore est un graphe plan sans circuit, où les sommets sont coloriés, en alternance, de deux couleurs différentes.

Théorème 1.3.4. *Il y a une bijection entre l'ensemble des types d'isomorphie d'arbres plans bicolores et l'ensemble des classes d'équivalence des polynômes de Shabat.*

Démonstration. En fait ce théorème découle du théorème d'existence de Riemann. Il est par contre intéressant d'en esquisser d'abord les grandes lignes. Commençons par donner voir, comment un arbre donne un polynôme de Shabat. Soit \mathcal{A} , un arbre plan bicolore. On lui associe un triplet de permutations, c'est-à-dire une 3-constellation, $[g_1, g_2, g_3]$ (Voir portion du haut de la figure 1.6). En ajoutant deux nombres complexes (le point noir et le point blanc de la portion du bas, de la figure 1.6), la constellation (g_1, g_2, g_3) , détermine un revêtement ramifié. Comme la constellation est planaire, elle induit un revêtement $f : S^2 \rightarrow S^2$. Par le théorème de Riemann, ce revêtement peut être

vu comme une fonction méromorphe (l'infini est préservé). Elle est donc une fonction rationnelle puisque S^2 est compacte. Comme cette fonction rationnelle n'a qu'un pôle à l'infini, c'est en fait un polynôme. Ce polynôme est unique à transformation linéaire près, d'après l'unicité dans le théorème d'existence de Riemann.

Remarque. La figure 1.6 représente l'image inverse, à homéomorphisme près, de l'intervalle $[0, \frac{3}{4}]$ par le polynôme $P(z) = z^4 - z^3$. Par contre, dans le but de rendre la figure plus claire, il faut noter que les quatre points représentant l'infini, ne sont en fait qu'un point. On peut voir l'arbre obtenu de façon plus claire à la figure 2.4.

Considérons tout de même comment on construit un arbre bicoloré à partir d'un polynôme de Shabat. Soit $P(z)$ un polynôme de Shabat. On sait que l'image inverse du segment $[c_0, c_1]$ dont les extrémités c_0, c_1 sont les valeurs critiques de $P(z)$ est un graphe G . Les sommets noirs sont solutions de l'équation $P(z) = c_0$ et les sommets blancs solutions de $P(z) = c_1$. Les sommets de degré plus grand que 1 de ce graphe sont des points critiques d'ordre égal au degré de ces sommets, tandis que les sommets de degré 1 sont non critiques, donc ordinaires. Les sommets de degré 1 sont en fait les racines simples des équations $P(z) = c_0$ et $P(z) = c_1$. Nous devons montrer que le graphe n'a pas de circuit et que le graphe est connexe. Vérifions que le graphe n'a pas de circuit ; condition pour être un arbre. Supposons le contraire. Supposons que le graphe G possède un circuit. Par transformation linéaire, $w \mapsto Aw + B$, on peut toujours supposer que les points c_0, c_1 sont réels. Alors, $\forall z \in G, P(z) \in \mathbb{R}$ car $P(z) \in [c_0, c_1] \subseteq \mathbb{R}$. En particulier, on a que $\forall z \in G, \operatorname{Im} P(z) = 0$. On pose $\operatorname{Im} P(z) = f(x, y)$, avec $z = x + iy$. On a $\forall z \in G, f(x, y) = 0$. En particulier, s'il y a un circuit C dans G , alors $\forall z \in C, f(x, y) = 0$. Or $f(x, y)$ est une fonction harmonique, puisque $P(z)$ est analytique. D'après le théorème de Dirichlet, il existe au maximum une seule fonction harmonique, sur et à l'intérieur du cycle C qui prenne la valeur 0 sur C . Or, 0 est une fonction harmonique partout prenant la valeur 0 sur C . Donc, par cette unicité $\operatorname{Im} P(z) = 0$, qui est la fonction harmonique identiquement nulle. Posons $P(z) = u + iv$. On vient de voir que $v = v(x, y) = 0$ identiquement. Mais d'après le théorème de Cauchy-

Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial 0}{\partial y} = 0$. Donc, $u(x, y) = \varphi(y)$, qui est une fonction constante en x . En effet $u(x, y) = u(x_0, y) + \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dx = u(x_0, y) + \int_{x_0}^x 0 dx = u(x_0, y)$, ce qui est bien une fonction de y seulement. Comme $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial 0}{\partial x} = 0$. Ainsi, $u(x, y) = \varphi(y) = c$, une constante. Donc, $P(z) = u + iv = c + i0 = c$. Le polynôme est donc constant, ce qui est contradictoire avec le fait que ce polynôme possède 2 valeurs critiques distinctes. Le graphe G est donc sans circuit. Comme un graphe sans circuit est soit un arbre, soit une forêt d'arbres, il nous reste à prouver que le graphe G est connexe. Pour ce faire nous allons compter le nombre de sommets. Les équations $P(z) = c_0$ et $P(z) = c_1$ de degré n , ont chacune au total $2n$ racines, si on compte les multiplicités. Par contre, il nous faut trouver le nombre de sommets en omettant les multiplicités. La multiplicité d'un point critique est égale au degré du sommet. Alors,

$$|S| = 2n - \sum_{s \in S} (deg(s) - 1),$$

où S est l'ensemble des sommets de G . En effet, supposons que z^* est un point critique de $P(z)$, correspondant à la valeur critique c_0 . On peut écrire $z^* \in \{z | P(z) = c_0\} \Leftrightarrow z^* \in \{z | P(z) - c_0\}$. Comme z^* est une racine de $P(z) - c_0$, alors $P(z^*) = c_0$. Par le développement en série de Taylor, $P(z) = P(z^*) + 0 + \dots + a_k(z - z^*)^k + \dots = c_0 + a_k(z - z^*)^k + \dots$, où k est l'ordre du point critique z^* et a_k une constante différente de zéro. Or si on somme sur les valeurs de z^* , on a $\sum_{z^*} deg(z^*) = n$. Par contre, $\sum_{z^*} 1 =$ nombre de racines distinctes de $P(z) - c_0$. Mais, $\sum_{z^*} 1 = \sum_{z^*} deg(z^*) - (deg(z^*) - 1) = \sum_{z^*} deg(z^*) - \sum_{z^*} (deg(z^*) - 1) = n - \sum_{z^*} (deg(z^*) - 1)$. De même pour les racines z^{**} de $P(z) - c_1$, on a que le nombre de racines distinctes est $n - \sum_{z^{**}} (deg(z^{**}) - 1)$. Donc, au total le nombre de racines de $P(z) - c_0$ et $P(z) - c_1$ est $n - \sum_{z^*} (deg(z^*) - 1) + n - \sum_{z^{**}} (deg(z^{**}) - 1) = 2n - \sum_{z^*} (deg(z^*) - 1) - \sum_{z^{**}} (deg(z^{**}) - 1) = 2n - \sum_s (deg(s) - 1)$. On sait qu'un sommet de degré k est aussi une racine de multiplicité $k - 1$ de $P'(z)$. D'ailleurs, le nombre de racines de $P'(z)$, en comptant les multiplicités, est $n - 1$. Alors, $\sum_s (deg(s) - 1) = n - 1$ et donc le nombre de sommets est $2n - (n - 1) = n + 1$. L'image inverse du segment $[c_0, c_1]$ donne n segments et comme on a $n + 1$ sommets, le graphe est connexe. On a donc bien que pour n'importe quel polynôme de Shabat, l'image inverse est un arbre plan bicolore.

Pour la direction opposée, la construction fait appel à des propriétés topologiques des sphères de Riemann qui dépassent le cadre de ce mémoire. Nous en donnons ici les grandes lignes en nous inspirant de l'article (Shabat et Zvonkin, 1994). Tout d'abord il faut noter qu'en remplaçant $P(z)$ par $Q(z) = AP(z) + B$ avec $A = \frac{1}{c_1 - c_0}$ et $B = \frac{c_0}{c_0 - c_1}$ on peut supposer que les valeurs critiques sont 0 et 1 plutôt que c_0 et c_1 . Ensuite on ajoute l'infini au plan du domaine. On obtient ainsi une sphère. On joint l'infini à tous les points de l'arbre, ainsi on a une triangulation de la sphère des z . De la même façon, on construit une sphère avec le plan w . En ajoutant l'axe réel, on obtient deux demi-plans qui sont en fait une triangulation de la sphère des w . Topologiquement, un demi-plan est un triangle avec comme sommet 0, 1 et l'infini. Il faut identifier chaque triangle de la sphère des z à un demi-plan de la sphère des w . En préservant l'orientation, chaque triangle de la sphère des z est associé, soit au demi-plan supérieur, soit au demi-plan inférieur de la sphère des w . On peut effectuer une telle relation entre les triangulations grâce au théorème de Riemann, qui nous dit que n'importe quels deux ouverts simplement connexes autres que \mathbb{C} sont biholomorphes. Ainsi, comme chaque triangle est un ensemble ouvert connexe simplement connexe, on peut utiliser le théorème. On peut identifier les triangles de la sphère des z aux triangles de la sphère des w . Il faut ensuite coller ces demi-plans en incluant une compactification des points 0, 1 et l'infini. On fait le collage jusqu'à l'obtention d'une sphère de Riemann. Ainsi on a une projection naturelle de la sphère de Riemann vers la sphère des w , assignant à chaque point z un point w . Comme c'est une fonction d'une sphère de Riemann vers une sphère de Riemann, la fonction est méromorphe. De plus, puisqu'elle associe l'infini à l'infini, cette fonction est donc un polynôme. Cette fonction nous donne un revêtement non-ramifié de la sphère en dehors de 0, 1 et l'infini. De tels revêtements sont des automorphismes de la sphère. Comme ils fixent l'infini, ces automorphismes sont des transformations de la forme $Aw + B$. \square

Il existe une autre preuve, dans (Biane, 2009), qui fait appel aux mesures harmoniques.

1.4 Rappels sur la théorie des espèces.

La théorie des espèces prend son envol en combinatoire grâce à A. Joyal. Elle fut ensuite développée davantage par l'équipe de combinatoire de l'UQAM. F. Bergeron, G. Labelle ainsi que feu P. Leroux en ont fait un brillant ouvrage (Bergeron, Labelle et Leroux). Les définitions et notions suivantes sont tirées de cet ouvrage.

Définition 1.4.1. Une espèce de structures F est un foncteur $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}$ allant de la catégorie \mathbb{B} des ensembles finis et bijections, vers la catégorie \mathbb{E} des ensembles finis et fonctions. Autrement dit, une espèce de structures est une règle F qui permet de produire, pour chaque ensemble fini U , un ensemble fini $F[U]$ et produire pour chaque bijection $\sigma : U \rightarrow V$, une fonction $F[\sigma] : F[U] \rightarrow F[V]$ tel que les fonctions $F[\sigma]$ satisfassent les propriétés suivantes :

$$i) \forall \sigma : U \rightarrow V, \forall \tau : V \rightarrow W \quad \text{on a} \quad F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma],$$

$$-- \quad ii) \text{ pour l'application identité } Id_U : U \rightarrow U \quad \text{on a} \quad F[Id_U] = Id_{F[U]}. \quad - - - -$$

On appelle un élément $s \in F[U]$, une F -structure sur U . On nomme la fonction $F[\sigma]$, la fonction de transport des F -structures le long de la bijection σ .

Nous allons avoir aussi besoin des deux séries formelles suivantes.

Définition 1.4.2. La série génératrice de l'espèce de structures F est la série formelle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!}$$

où $f_n = |F[\underline{n}]|$ et $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$

Définition 1.4.3. La série génératrice des types d'isomorphie d'une espèce de structures F est la série formelle

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{f_n} x^n$$

où $\widetilde{f_n}$ désigne le nombre de F -structures à isomorphisme près sur n sommets. La série $\tilde{F}(x)$ est souvent appelée la série *tilda* de l'espèce F .

Par abus de notation nous allons laisser tomber \underline{n} pour écrire n seulement. Voici quelques exemples d'espèces et de leurs séries génératrices associées.

Exemple 1.4.4. L'espèce des permutations notée \mathbb{S} ,

$$\mathbb{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Exemple 1.4.5. L'espèce des sous-ensembles notée \mathcal{P} ,

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x}.$$

Exemple 1.4.6. L'espèce des ensembles notée E ,

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exemple 1.4.7. L'espèce des ordres linéaires notée L ,

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Exemple 1.4.8. L'espèce des ordres linéaires de longueur m notée L_m ,

$$L_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=m}^{\infty} x^n = x^m.$$

En particulier, si $m = 1$, on a $L_1 = X$, où X est l'espèce des singletons et $L_1(x) = X(x) = x$.

Théorème 1.4.9. Soit F et G deux espèces. On a

- a) $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$,
- b) $(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x)$,
- c) $(F \circ G)(x) = F(G(x))$,
- d) $F'(x) = \frac{d}{dx} F(x)$.

L'espèce $F + G$ peut se représenter sous forme de dessin, on peut le voir à la figure 1.7. Une $F + G$ -structure, c'est une F -structure ou une G -structure. Ici le « ou » est exclusif.

L'espèce $F \cdot G$ peut se représenter sous forme de dessin, on peut le voir à la figure 1.8.

Une $F \cdot G$ -structure c'est une F -structure accouplée à une G -structure disjointe.

L'espèce $F \circ G$ peut se représenter sous forme de dessin, on peut le voir à la figure 1.9. Une $F \circ G$ -structure c'est une F -structure placée sur un ensemble de G -structures disjointes.

Définition 1.4.10. (Multiensemble) Soit $k \geq 1$, un entier. Un multiensemble à k sortes d'éléments est un k -uplet d'ensembles

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_k).$$

Un élément $u \in U_i$ est appelé un élément de U de sorte i . Le multicaldinal de U est le k -uplet de cardinaux

$$|U| = (|U_1|, |U_2|, \dots, |U_k|).$$

Le cardinal total de U est la somme

$$||U|| = |U_1| + |U_2| + \dots + |U_k|.$$

Définition 1.4.11. (Multifonction) Un multifonction f de (U_1, U_2, \dots, U_k) vers (V_1, V_2, \dots, V_k) , notée

$$f : (U_1, U_2, \dots, U_k) \rightarrow (V_1, V_2, \dots, V_k),$$

est un k -uple de fonctions $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ telles que f_i est une fonction de U_i vers V_i , pour $i = 1, \dots, k$.

La composition de deux multifonctions se fait composante à composante. La multifonction $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ est dite bijective, si chaque fonction f_i est bijective.

Définition 1.4.12. (Espèce multisortes) Soit $k \geq 1$, un entier. Une espèce sur k sortes est une règle F qui permet de

- 1) Produire, pour chaque multiensemble fini $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$, un ensemble fini $F[U_1, U_2, \dots, U_k]$,

2) Produire, pour chaque multifonction bijective $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) := (U_1, U_2, \dots, U_k) \rightarrow (V_1, V_2, \dots, V_k)$, une fonction,

$$F[\sigma] = F[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k] : F[U_1, U_2, \dots, U_k] \rightarrow F[V_1, V_2, \dots, V_k].$$

De plus, les fonctions $F[\sigma]$ doivent satisfaire les propriétés de fonctorialité, c'est-à-dire que pour $\sigma = U \rightarrow V$ et $\tau = V \rightarrow W$, des multifonctions bijectives, et pour $id_U : U \rightarrow U$, la multifonction identité, on doit avoir

$$1) F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma]$$

$$2) F[id_U] = id_{F[U]}.$$

Un élément $s \in F[U_1, U_2, \dots, U_k]$ est appelé une F -structure sur (U_1, U_2, \dots, U_k) . La fonction $F[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k]$ est appelée le transport des F -structures le long de $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$. Si $t = F[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k](s)$, on dit que s et t sont des structures isomorphes. Les classes d'équivalence sous cette relation sont appelées F -structures non-étiquetées.

La prochaine définition va nous intéresser davantage.

Définition 1.4.13. Soit $F = F(X, Y)$, une espèce à deux sortes. La série génératrice $F(x, y)$ et la série génératrice des types $\tilde{F}(x, y)$ sont définies par

$$F(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} |F[n, k]| \frac{x^n}{n!} \frac{y^k}{k!},$$

où $|F[n, k]|$ est le nombre de F -structures sur $[n, k] := ([n], [k])$,

$$\tilde{F}(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} |F[n, k]/\sim| x^n y^k,$$

où $|F[n, k]/\sim|$ est le nombre de structures non étiquetées sur $[n, k]$.

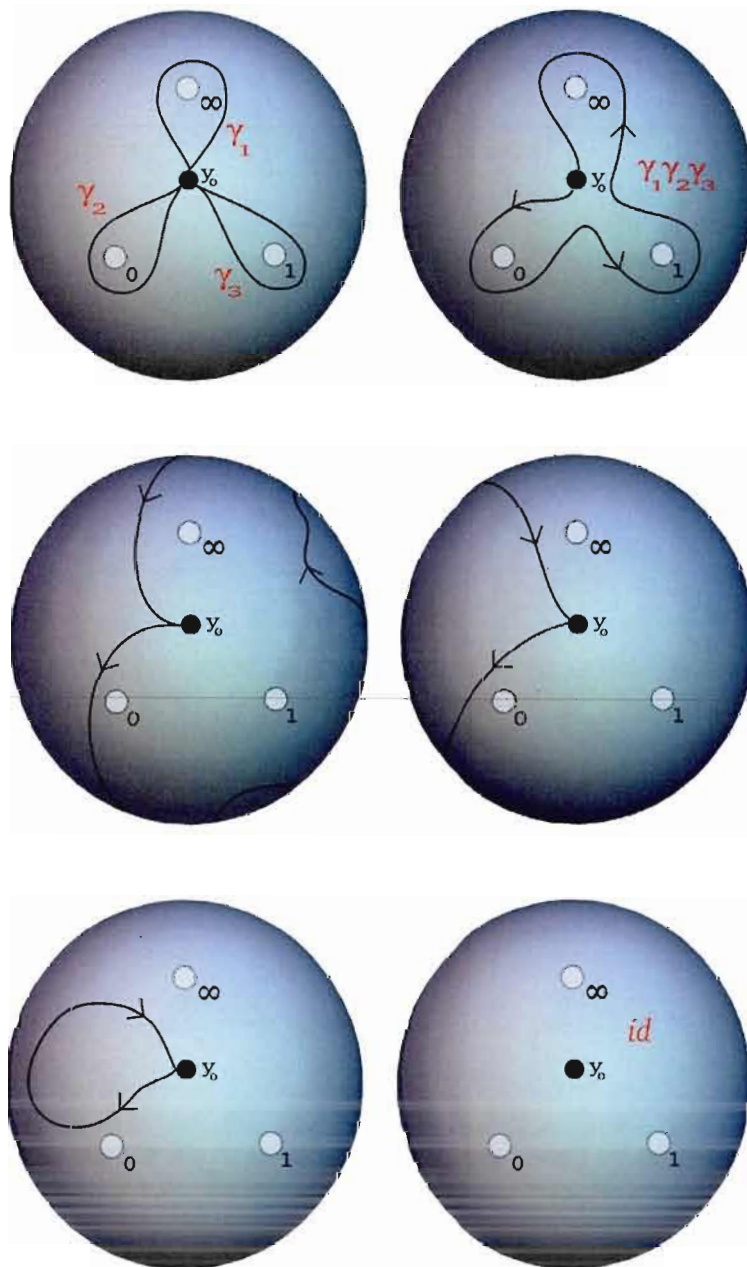


Figure 1.2 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = id$

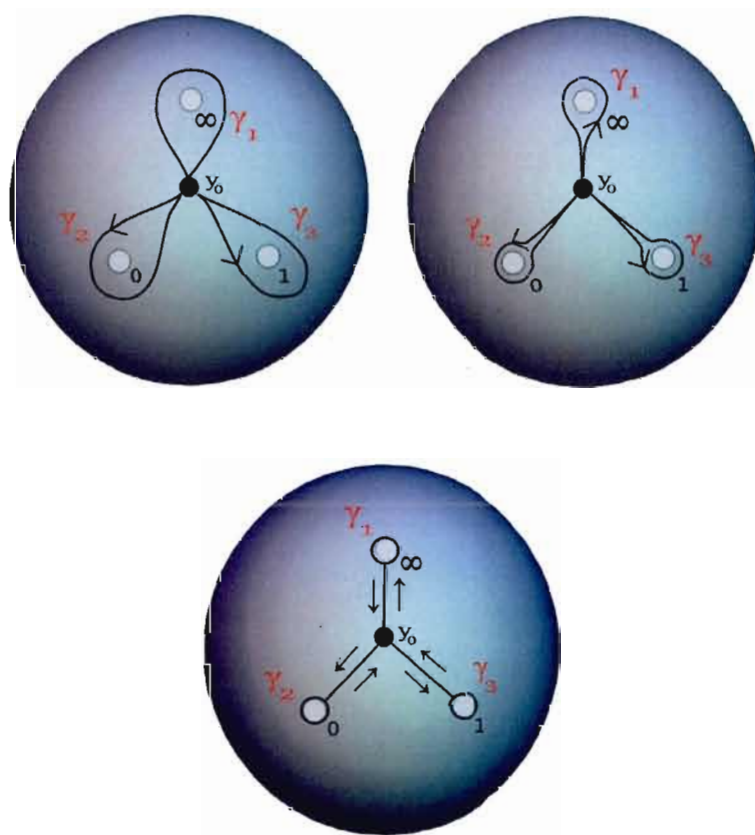


Figure 1.3 On obtient une étoile par homotopie, en rétrécissant les lacets.

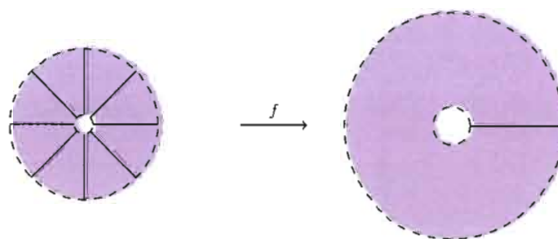


Figure 1.4 Cas non-ramifié, avant compactification.

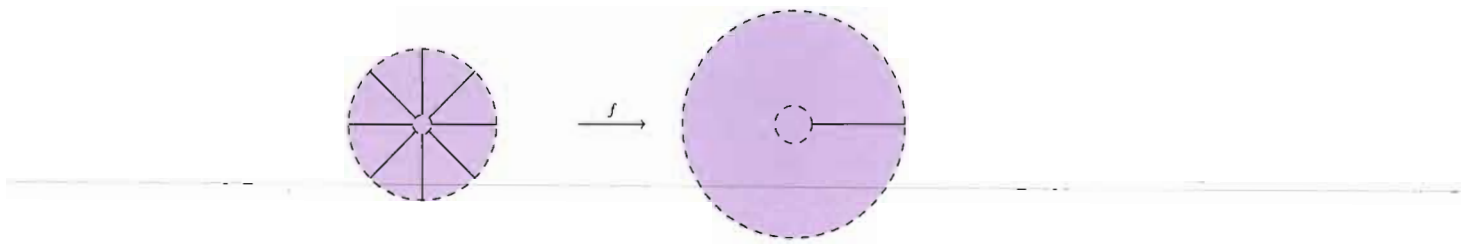


Figure 1.5 Cas ramifié, après compactification.

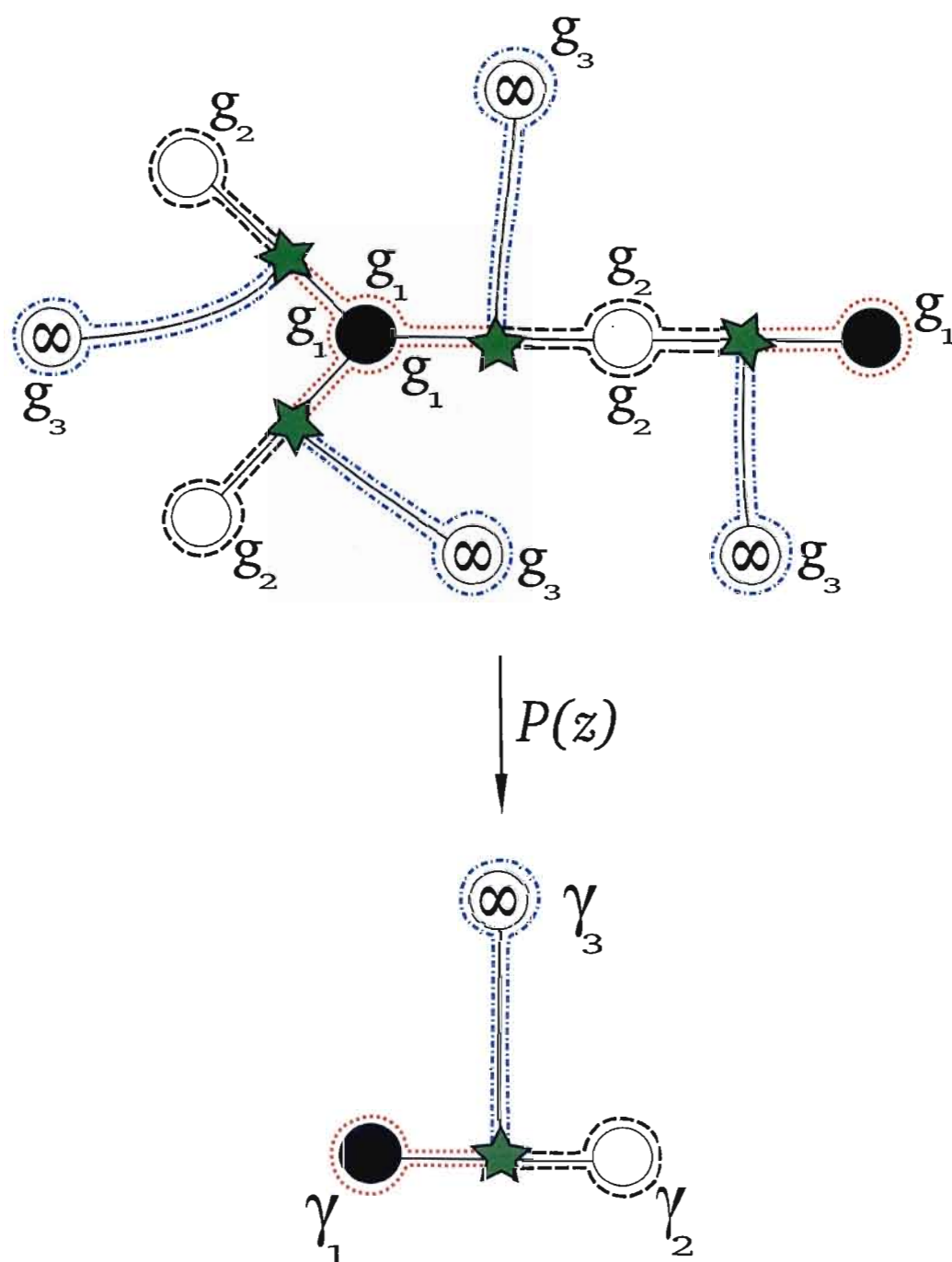
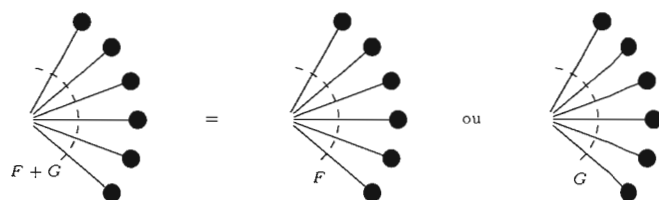
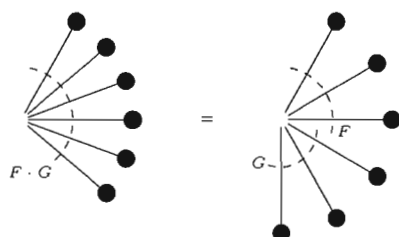
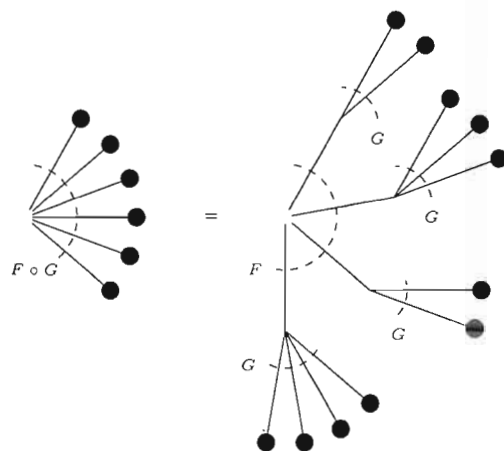


Figure 1.6 L'image inverse, par un polynôme, d'un segment auquel on a ajouté l'infini.

Figure 1.7 L'espèce $F + G$ Figure 1.8 L'espèce $F \cdot G$ Figure 1.9 L'espèce $F \circ G$

CHAPITRE II

ARBRES PLANS BICOLORÉS ET POLYNÔMES DE SHABAT

Dans cette section, nous allons d'abord nous intéresser aux polynômes de Tchebychev. Il y en a deux sortes, de première espèce et de deuxième espèce. Nous allons nous pencher sur ceux de première espèce. Ces polynômes sont des polynômes très intéressants puisqu'ils ont seulement deux valeurs critiques, mise à part l'infini, ce qui facilite le calcul de leurs images inverses. Un segment, où les sommets (extrémités) sont les valeurs critiques, nous donne un graphe intéressant par l'image inverse. Tout d'abord, introduisons ces fameux polynômes.

2.1 Polynômes de Tchebychev classiques de première espèce.

L'idée générale permettant de définir les polynômes de Tchebyshev est de développer la fonction trigonométrique $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$. Pour ce faire on utilise les identités trigonométriques suivantes :

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B),$$

$$\sin(A + B) = \sin(A) \cos(B) + \cos(A) \sin(B) .$$

Lemme 2.1.1. *La fonction trigonométrique $\cos(n\theta)$ peut s'écrire sous forme de somme de puissance de $\cos(\theta)$. C'est-à-dire, qu'il existe un polynôme $T_n(x)$ tel que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.*

Démonstration. Procédons par récurrence. Cas de base : pour $n = 0$, posons $T_0(x) = 1$,

en effet $\cos(0 * \theta) = \cos(0) = 1$. C'est bien un polynôme écrit seulement en $\cos(\theta)$ de puissance zéro. Supposons que pour toutes valeurs de $k \leq n$, la fonction $\cos(k\theta)$ peut s'écrire comme un polynôme en $\cos(\theta)$. Maintenant montrons-le pour $n + 1$. On a

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta),$$

$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) + \sin(n\theta) \sin(\theta).$$

En additionnant ces deux identités, on obtient

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) + \cos(n\theta) \cos(\theta) + \sin(n\theta) \sin(\theta)$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= 2 \cos(\theta) T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

On a donc bien encore un polynôme en $\cos(\theta)$. □

Il sera utile de poser $x = \cos(\theta)$ et $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$. On obtient la formule de récurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition 2.1.2. Les $x \in \mathbb{R}$ les $(T_n(x))_{n \geq 0}$ s'appellent les polynômes de Tchebychev et sont caractérisés par les équations suivantes : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ avec $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n \geq 1$

Exemple 2.1.3. Voici un exemple pour n de zéro à six.

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

2.1.1 Les polynômes de Shabat vus comme des polynômes de Tchebychev généralisés

Les polynômes de Tchebychev sont des cas particuliers de polynômes plus généraux, appelés polynômes de Shabat, que nous avons définis plus tôt (définition 1.3.1).

Définition 2.1.4. (Polynôme de Shabat) Un polynôme avec au plus deux valeurs critiques, sans compter l'infini, est appelé un polynôme de Shabat.

On va montrer que les $T_n(x)$ sont des polynômes de Shabat avec valeurs critiques 1 et -1 . Ainsi les polynômes de Shabat pourront être vus comme des polynômes de Tchebychev généralisés. Commençons par considérer leurs graphes : voir la figure 2.1.

Dans ces graphiques, on remarque qu'à l'intérieur de l'intervalle $] -1, 1[$, le point de départ du graphe est $(-1, -1)$ si n est impair et $(-1, 1)$ si n est pair. Par contre, le point d'arrivée du graphe est toujours $(1, 1)$. On peut aussi remarquer qu'il y a $n - 1$ points critiques.

Lemme 2.1.5. *Les polynômes de Tchebychev ont exactement $n-1$ points critiques dans l'intervalle $] -1, 1[$. Ce sont tous les points critiques de ces polynômes, sauf l'infini.*

Démonstration. Vérifions pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la dérivée des polynômes de Tchebychev s'annule. Cela revient à trouver la valeur de θ pour que $T'_n(\cos(\theta)) = 0$ lorsque $x = \cos(\theta)$. Trouvons cette valeur de θ . On sait que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Appliquons la dérivée de chaque côté. On a

$$\begin{aligned} T'_n(\cos(\theta))(-\sin(\theta)) &= -n \sin(n\theta) \\ \Rightarrow T'_n(\cos(\theta)) &= \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

On a donc que

$$\begin{aligned}
\frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(\theta), \\ \sin(n\theta) = 0, \\ \theta \neq m\pi. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(\theta), \\ n\theta = 2k\pi \text{ ou } n\theta = 2k\pi + \pi, \\ \theta \neq m\pi. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(\theta), \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \text{ ou } \theta = \frac{2k\pi + \pi}{n}, \\ \theta \neq m\pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{n} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{2\pi}{n} \quad \text{ou, ... , ou} \quad \theta = \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

On a donc bien que les points critiques sont $x_1 = \cos(\frac{\pi}{n}), x_2 = \cos(\frac{2\pi}{n}), \dots, x_{n-1} = \cos(\frac{(n-1)\pi}{n})$. Comme les points sont distincts et que $T'_n(x)$ est de degré $n-1$, ce sont tous les points critiques de T_n , sauf l'infini. \square

Lemme 2.1.6. *Les polynômes de Tchebychev ont toujours exactement deux valeurs critiques pour $n \geq 3$ (sans compter l'infini). Ces valeurs critiques sont -1 et 1 .*

Démonstration. Soit $(x_k)_{k \leq n-1}$ les points critiques. On a que $T_n(x_k) = T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = \cos(n(\frac{k\pi}{n})) = \cos(k\pi) = (-1)^k \in \{-1, 1\}$. Ce sont donc bien nos deux valeurs critiques. \square

Lemme 2.1.7. *Les points critiques, sauf l'infini, des polynômes de Tchebychev sont toujours d'ordre deux pour $n \geq 3$.*

Démonstration. Soit $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$, $1 \leq k \leq (n-1)$ les points critiques de $T_n(x)$. On a $T'_n(x_k) = 0$. Vérifions que $T''_n(x_k) \neq 0$. On a que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Dérivons cette dernière équation de chaque côté par rapport à θ . On obtient $T'_n(\cos(\theta))(-\sin(\theta)) = -n \sin(n\theta)$. Dérivons à nouveau. On a maintenant que $T''_n(\cos(\theta))(-\sin(\theta))^2 + T'_n(\cos(\theta))(-\cos(\theta)) = -n^2 \cos(n\theta)$. Remplaçons θ par sa valeur

qui est $\frac{k\pi}{n}$. On obtient $T_n''(x_k)(-\sin(\frac{k\pi}{n}))^2 = -n^2 \cos(k\pi) = -n^2(-1)^k = (-1)^{k+1}n^2 \Rightarrow T_n''(x_k) = \frac{(-1)^{k+1}n^2}{(-\sin(\frac{k\pi}{n}))^2} \neq 0$. On a donc bien que les points critiques des polynômes de Tchebychev sont tous d'ordre deux. \square

2.1.2 Image inverse d'un segment

Rappelons que l'image inverse, par un polynôme de Shabat, d'un segment dont les sommets sont des valeurs critiques, donne un arbre bicolore. L'image inverse d'un point, qui n'est pas une valeur critique, par un polynôme de degré n , donne n points. De même, l'image inverse d'un segment, dont les points ne sont pas des valeurs critiques, par un polynôme de degré n , donne n segments. Ces segments, se rencontrent aux points critiques, formant ainsi un arbre plan. EN coloriant les deux sommets du segment de deux couleurs différentes, l'arbre résultant de l'image inverse sera bicolore. En considérant les points comme des sommets, l'ordre d'un point critique correspond au degré du sommet. Considérons d'abord quelques exemples. Notons que nous allons reprendre ces mêmes exemples dans un prochain chapitre, afin d'illustrer la procédures RootLocus de Maple. Comme nous avons pu voir dans l'exemple 1.1.5, les points critiques étaient 0 de multiplicité n et 1 de multiplicité 1. On relie ces points pour en faire un segment. On regarde alors l'image inverse de ce segment. Il se trouve que l'on obtient une étoile. Voir la figure 2.2. Comme nous avons vu plus haut, les polynômes de Tchebychev ont deux valeurs critiques, -1 et 1 et il sont d'ordre deux. Ainsi, nous obtenons la figure 2.3.

Exemple 2.1.8. Soit $P(z) = z^3(z-1) = z^4 - z^3$. Trouvons les points critiques de $P(z)$.

Calculons d'abord les dérivées successives du polynôme :

$$P'(z) = 4z^3 - 3z^2,$$

$$P^{(2)}(z) = 12z^2 - 6z,$$

$$P^{(3)}(z) = 24z - 6,$$

$$P^{(4)}(z) = 24.$$

Notons que $P^{(4)}(z) = 24 \neq 0$. Ce qui fait que les points critiques sont d'ordres au plus trois. Les points critiques possibles sont ceux qui annulent la dérivée. Résolvons $P'(z) = 0$. On a que $4z^3 - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2(4z - 3) = 0$. On trouve les deux points critiques

$a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{3}{4}$ de valeur critique $v_1 = 0$ et $v_2 = \frac{-27}{256}$ respectivement. Cherchons l'ordre de ces points critiques. Pour $a_1 = 0$, on remplace dans les dérivées seconde et troisième. $P^{(2)}(a_1) = 12a_1^2 - 6a_1 = 0$ et $P^{(3)}(a_1) = 24a_1 - 6 = -6 \neq 0$. Ainsi l'ordre de $a_1 = 0$ est $k_1 = 3$. Pour ce qui est de a_2 , on trouve que $P^{(2)}(a_2) = 12a_2^2 - 6a_2 = \frac{63}{4} \neq 0$. L'ordre de a_2 est $k_2 = 2$. L'image inverse de v_1 est $P^{-1}(v_1) = \{z | P(z) = v_1\} = \{z | P(z) = 0\} = \{z | z^3(z-1) = 0\} = \{0, 1\}$, où 1 est un point qui n'est pas critique. L'image inverse de v_2 est $P^{-1}(\frac{-27}{256}) = \{\frac{3}{4}, \frac{-1+i\sqrt{2}}{4}, \frac{-1-i\sqrt{2}}{4}\}$. On relie ensuite les points de l'image inverse, qui d'ailleurs se calculent de la même façon que précédemment et on obtient la figure 2.4. Notons que dans cette figure, $c = \frac{-1+i\sqrt{2}}{4}$, $d = \frac{-1-i\sqrt{2}}{4}$. Pour l'arbre exact calculé avec Maple, voir la figure 4.1, chapitre 4.

2.2 Équations pour trouver les polynômes de Shabat

Afin de normaliser au maximum les paramètres, on peut toujours supposer que $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, p \in \mathbb{N}$ et $a_0 = 0$, sont des points critiques de valeurs critiques zéro et de multiplicités m_0, m_1, \dots, m_p respectivement. On peut supposer aussi que $b_0, b_1, \dots, b_q, q \in \mathbb{N}$ et $b_0 = 1$, sont des points critiques de valeurs critiques un et de multiplicités n_0, n_1, \dots, n_q respectivement. En effet, si $P(z)$ est un polynôme de Shabat, alors $AP(az+b) + B$ est aussi un polynôme de Shabat. On fixe d'avance les multiplicités des $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q$. Remarque : un tour autour de la valeur critique 0 revient à faire $m_i, i \in [0..p]$ tours autour des points critiques associés et un tour autour de la valeur critique 1, revient à faire $n_i, i \in [0..q]$ tours autour des points critiques associés. Soit P un polynôme de Shabat ayant ces paramètres. On a que

$$P'(z) = cz^{m_0-1}(1-z)^{n_0-1}(z-a_1)^{m_1-1}(z-a_2)^{m_2-1} \dots (z-a_p)^{m_p-1}(b_1-z)^{n_1-1}(b_2-z)^{n_2-1} \dots (b_q-z)^{n_q-1}$$

Par intégration, le polynôme de Shabat recherché ayant ces paramètres, s'écrit sous la forme

$$P(z) = \int_0^z cz^{m_0-1}(1-z)^{n_0-1}(z-a_1)^{m_1-1} \dots (z-a_p)^{m_p-1}(b_1-z)^{n_1-1} \dots (b_q-z)^{n_q-1} dz$$

Considérons maintenant les conditions sur les a_i et b_i . Comme on veut que les a_i soient des points critiques, on veut que $P(0) = 0, P(a_1) = 0, \dots, P(a_p) = 0$. On a que $P(0) = 0$

automatiquement par le choix de la borne inférieure de l'intégrale. Ils nous reste ainsi p équations à p inconnues et de même pour les b_i . Par contre, $P(1) = 1$ est une équation à considérer, alors on a $q + 1$ équations à $q + 1$ inconnues. Donc au total, on a $p + q + 1$ équations et inconnues, $c, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, b_q$. Passons maintenant à un cas particulier, le cas eulérien. On considère la fonction bêta qui est une intégrale d'Euler de première espèce : pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $B(z, w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1}dx = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$, si $\operatorname{Re}(z) > 0$ et $\operatorname{Re}(w) > 0$, où Γ est la fonction gamma d'Euler. Dans notre cas, on remplace z par m et w par n et on prend $p = q = 0$. On a que $P'(z) = cz^{m_0-1}(1-z)^{n_0-1}$, alors si on applique l'intégrale, on a $P(z) = \int_0^z z^{m_0-1}(1-z)^{n_0-1}dz$. Comme $p = q = 0$, des $p+q+1$ conditions il n'en reste qu'une, $P(1) = 1$. Ainsi, $1 = c \int_0^1 z^{m_0-1}(1-z)^{n_0-1}dz$. La constante c devient, $c = \frac{1}{\int_0^1 z^{m_0-1}(1-z)^{n_0-1}dz}$, que l'on peut réécrire, $c = \frac{1}{B(m_0, n_0)} = \frac{(m_0+n_0-1)!}{(m_0-1)!(n_0-1)!}$, car $\Gamma(m) = (m-1)!$ si $m > 0$ pour $m \in \mathbb{N}$. Donc, on en conclut que dans le cas eulérien les polynômes de Shabat s'écrivent sous la forme $P(z) = \frac{1}{B(m_0, n_0)} \int_0^z z^{m_0-1}(1-z)^{n_0-1}dz$.

2.2.1 Utilisation des fonctions symétriques et équations de Couveignes

Nous allons voir une méthode développée par Jean-Marc Couveignes de l'Université Toulouse 2 dans l'article (Couveignes, 1994). Il faut trouver $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$ et c tels que $A(z) = c + B(z)$ où $A(z) = (z - a_1)^{m_1}(z - a_2)^{m_2} \dots (z - a_p)^{m_p}$ et $B(z) = (z - b_1)^{n_1}(z - b_2)^{n_2} \dots (z - b_q)^{n_q}$. Notons que l'image des a_i est 0 et l'image des b_j est c , pour tous i, j . Notons aussi que si $m_i > 1$, alors les a_i sont des points critiques (respectivement n_j, b_j). La méthode est décrite par la proposition 2.2.6, mais afin d'en saisir les subtilités, il nous faut d'abord quelques notions algébriques, telles les identités de Newton. Commençons par donner un exemple qualitatif et intuitif illustrant de façon simple vers quoi nous nous dirigeons.

Soit $A(z) = (z - a_1)^4(z - a_2)^3(z - a_3)(z - a_4) = c + (z - b_1)^2(z - b_2)^3(z - b_3)(z - b_4)(z - b_5)(z - b_6)$. Ici $m_1 = 4, m_2 = 3, m_3 = m_4 = 1, p = 4, n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 1$ et $q = 6$. Voir la figure 2.5 à homéomorphisme près. L'enjeu est que si la structure de l'arbre avec ses multiplicités est donnée, alors il faut trouver les nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$ et c . On a que la somme des degrés de tous les sommets d'une

La formule suivante sert à relier les sommes de puissance p_k , aux fonctions symétriques élémentaires e_k ,

$$\sum_{i \geq 0} e_i t^i = \exp\left(\sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1} p_{\nu} t^{\nu}}{\nu}\right).$$

Pour le voir, il suffit de procéder comme suit : on sait que $(1 + z_1 t)(1 + z_2 t) \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} e_i t^i$ où $e_0 = 1$ et $e_i = e_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Comme l'on connaît la série des cycles, $\ln(\frac{1}{1-x}) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$, on peut écrire $\ln(1 + z_i t) = -\ln(\frac{1}{1+z_i t}) = -\ln(\frac{1}{1-(-z_i t)}) = -((-z_i t) + \frac{(-z_i t)^2}{2} + \frac{(-z_i t)^3}{3} + \dots)$. Donc $\ln(1 + z_i t) = \sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1} p_{\nu} t^{\nu}}{\nu}$. Ainsi, $(1 + z_i t) = \exp(\ln(1 + z_i t)) = \exp(\sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1} p_{\nu} t^{\nu}}{\nu})$ et

$$\begin{aligned} (1 + z_1 t)(1 + z_2 t) \dots &= \exp\left(\sum_{i \geq 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} z_i^{\nu} t^{\nu}}{\nu}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{\nu-1} z_i^{\nu} t^{\nu}}{\nu}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \left(\sum_{i \geq 1} z_i^{\nu}\right) \frac{t^{\nu}}{\nu}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} p_{\nu} \frac{t^{\nu}}{\nu}\right). \end{aligned}$$

d'où la formule.

Lemme 2.2.4. (Les identités de Newton). *Pour tout $k \geq 1$, on a*

$$p_k = p_{k-1}e_1 - p_{k-2}e_2 + \dots + (-1)^{k-2}p_1e_{k-1} + (-1)^{k-1}ke_k.$$

Démonstration. Appliquons l'opérateur $t \frac{d}{dt}$ de chaque côté de l'identité que nous venons de démontrer. On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} i e_i t^i &= t \frac{d}{dt} \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} p_{\nu} \frac{t^{\nu}}{\nu}\right) \\ &= t \left(\sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{\nu-1} p_{\nu} t^{\nu}}{\nu}\right)' \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{\nu-1} p_{\nu} t^{\nu}}{\nu}\right) \\ &= \left(\sum_{i \geq 1} (-1)^{\nu-1} p_{\nu} t^{\nu}\right) \sum_{j \geq 0} e_j t^j. \end{aligned}$$

En résumé, on a que

$$\sum_{i \geq 1} i e_i t^i = \left(\sum_{i \geq 1} (-1)^{\nu-1} p_{\nu} t^{\nu}\right) \sum_{j \geq 0} e_j t^j.$$

Égalisons les coefficients de part et d'autre de cette dernière équation. On a

$$ke_k = \sum_{\substack{\nu+j=k \\ \nu \geq 1 \\ j \geq 0}} (-1)^{\nu-1} p_\nu e_j = p_1 e_{k-1} - p_2 e_{k-2} + \dots + (-1)^{k-2} p_{k-1} e_1 + (-1)^{k-1} p_k e_0.$$

On multiplie le tout par $(-1)^{k-1}$ et on obtient l'identité recherchée

$$p_k = p_{k-1} e_1 - p_{k-2} e_2 + \dots + (-1)^{k-2} p_1 e_{k-1} + (-1)^{k-1} k e_k.$$

□

Exemple 2.2.5. Si $N = 2$, alors on a les variables $z_1, z_2, 0, 0, 0, \dots$. Ainsi $p_1(z_1, z_2, 0, 0, 0, \dots) = z_1 + z_2, p_2(z_1, z_2, 0, 0, 0, \dots) = z_1^2 + z_2^2, \dots, p_k(z_1, z_2, 0, 0, 0, \dots) = z_1^k + z_2^k$. Vérifions l'identité sur un exemple. Si on prend le $k = 2$, alors $p_1 e_1 + (-1) 2 e_2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2) - 2(z_1 z_2) = (z_1 + z_2)^2 - 2(z_1 z_2) = z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 = z_1^2 + z_2^2 = p_2$.

Proposition 2.2.6. (Couveignes, 1994) L'identité polynomiale $A(z) = c + B(z)$ où

$$A(z) = (z - a_1)^{m_1} (z - a_2)^{m_2} \dots (z - a_p)^{m_p} \text{ et } B(z) = (z - b_1)^{n_1} (z - b_2)^{n_2} \dots (z - b_q)^{n_q}$$

est équivalente au système d'équations suivant.

$$\begin{aligned} E_0 : \quad & m_1 + m_2 + \dots + m_p = n_1 + n_2 + \dots + n_q = N, \\ E_1 : \quad & m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_p a_p = n_1 b_1 + n_2 b_2 + \dots + n_q b_q, \\ E_2 : \quad & m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \dots + m_p a_p^2 = n_1 b_1^2 + n_2 b_2^2 + \dots + n_q b_q^2, \\ & \vdots \\ E_{N-1} : \quad & m_1 a_1^{N-1} + m_2 a_2^{N-1} + \dots + m_p a_p^{N-1} = n_1 b_1^{N-1} + n_2 b_2^{N-1} + \dots + n_q b_q^{N-1}, \\ E_N : \quad & m_1 a_1^N + m_2 a_2^N + \dots + m_p a_p^N = n_1 b_1^N + n_2 b_2^N + \dots + n_q b_q^N - Nc, \end{aligned}$$

où N est le degré commun de $A(z)$ et $B(z)$.

Démonstration. Soit $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)$ un polynôme de degré N dont les racines, z_1, z_2, \dots, z_N sont possiblement répétées. Alors si on développe $P(z)$, on obtient le résultat connu $P(z) = z^N - (z_1 + z_2 + \dots + z_N)z^{N-1} +$

$(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_i z_j + \dots) z^{N-2} - (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_i z_j z_k + \dots) z^{N-3} + \dots + (-1)^N z_1 z_2 \dots z_N$; que l'on peut réécrire avec des fonctions symétriques élémentaires, $P(z) = Z^N - e_1(z_1, z_2, \dots, z_N) z^{N-1} + e_2(z_1, z_2, \dots, z_N) z^{N-2} + \dots + (-1)^N e_N(z_1, z_2, \dots, z_N)$. Par abus de notation, nous écrirons $P(z) = z^N - e_1 z^{N-1} + \dots + (-1)^N e_N$. Posons $(z_1, z_2, \dots, z_N) := (\underbrace{a_1, a_1, \dots, a_1}_{m_1}, \underbrace{a_2, a_2, \dots, a_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{a_p, a_p, \dots, a_p}_{m_p})$, de plus posons $\vec{a} = (\underbrace{a_1, a_1, \dots, a_1}_{m_1}, \underbrace{a_2, a_2, \dots, a_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{a_p, a_p, \dots, a_p}_{m_p})$ et $\vec{b} = (\underbrace{b_1, b_1, \dots, b_1}_{n_1}, \underbrace{b_2, b_2, \dots, b_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{b_q, b_q, \dots, b_q}_{n_q})$ alors $A(z) = z^N - e_1(\vec{a}) z^{N-1} + e_2(\vec{a}) z^{N-2} - \dots + (-1)^N e_N(\vec{a})$ et $c + B(z) = c + (z - b_1)^{n_1} (z - b_2)^{n_2} \dots (z - b_q)^{n_q} = z^N - e_1(\vec{b}) z^{N-1} + e_2(\vec{b}) z^{N-2} - \dots + (-1)^N e_N(\vec{b}) + c$. Ainsi, $A(z) = c + B(z)$ équivaut au système d'équations suivant.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_0 : \quad & m_1 + m_2 + \dots + m_p = n_1 + n_2 + \dots + n_q = N, \\
 \mathcal{E}_1 : \quad & -e_1(\vec{a}) = -e_1(\vec{b}), \\
 \mathcal{E}_2 : \quad & e_2(\vec{a}) = e_2(\vec{b}), \\
 & \vdots \\
 \mathcal{E}_{N-1} : \quad & -e_{N-1}(\vec{a}) = -e_{N-1}(\vec{b}), \\
 \mathcal{E}_N : \quad & (-1)^N e_N(\vec{a}) = c + (-1)^N e_N(\vec{b}).
 \end{aligned}$$

En faisant disparaître les signes négatifs, on obtient le système équivalent,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_0 : \quad & m_1 + m_2 + \dots + m_p = n_1 + n_2 + \dots + n_q = N, \\
 \mathcal{E}_1 : \quad & e_1(\vec{a}) = e_1(\vec{b}), \\
 \mathcal{E}_2 : \quad & e_2(\vec{a}) = e_2(\vec{b}), \\
 & \vdots \\
 \mathcal{E}_{N-1} : \quad & e_{N-1}(\vec{a}) = e_{N-1}(\vec{b}), \\
 \mathcal{E}_N : \quad & e_N(\vec{a}) = (-1)^N c + e_N(\vec{b}).
 \end{aligned}$$

Finalement, d'après les identités de Newton on a le système équivalent suivant

$$\begin{aligned}
E_0 : \quad & m_1 + m_2 + \dots + m_p = n_1 + n_2 + \dots + n_q, \\
E_1 : \quad & p_1(\vec{a}) = p_1(\vec{b}), \\
E_2 : \quad & p_2(\vec{a}) = p_2(\vec{b}), \\
& \vdots \\
E_{N-1} : \quad & p_{N-1}(\vec{a}) = p_{N-1}(\vec{b}), \\
E_N : \quad & p_N(\vec{a}) = p_N(\vec{b}) - Nc.
\end{aligned}$$

En effet, si on connaît les p_i pour $i \in [1, k-1]$ et les e_i pour $i \in [1, k]$ alors on connaît p_k par les identités de Newton. En effet, pour $k = 1$ on a $p_1(\vec{a}) = e_1(\vec{a})$, puisque $e_1(\vec{a}) = e_1(\vec{b})$ et $e_1(\vec{b}) = p_1(\vec{b})$, alors $p_1(\vec{a}) = p_1(\vec{b})$. Pour $k = 2$ on a $p_2(\vec{a}) = p_1(\vec{a})e_1(\vec{a}) - 2e_2(\vec{a}) = p_1(\vec{b})e_1(\vec{b}) - 2e_2(\vec{b}) = p_2(\vec{b})$. Vérifions pour $1 \leq k \leq n$. $p_k(\vec{a}) = p_{k-1}(\vec{a})e_1(\vec{a}) - p_{k-2}(\vec{a})e_2(\vec{a}) + \dots + (-1)^{k-2}p_1(\vec{a})e_{k-1}(\vec{a}) + (-a)^{k-1}e_k(\vec{a}) = p_{k-1}(\vec{b})e_1(\vec{b}) - p_{k-2}(\vec{b})e_2(\vec{b}) + \dots + (-1)^{k-2}p_1(\vec{b})e_{k-1}(\vec{b}) + (-1)^{k-1}ke_k(\vec{b}) = p_k(\vec{b})$. Pour $k = N$, on a $p_N(\vec{a}) = p_{N-1}(\vec{a})e_1(\vec{a}) - p_{N-2}(\vec{a})e_2(\vec{a}) + \dots + (-1)^{N-2}p_1(\vec{a})e_{N-1}(\vec{a}) + (-1)^{N-1}Ne_N(\vec{a}) = p_{N-1}(\vec{b})e_1(\vec{b}) - p_{N-2}(\vec{b})e_2(\vec{b}) + \dots + (-1)^{N-2}p_1(\vec{b})e_{N-1}(\vec{b}) + (-1)^{N-1}N(e_N(\vec{b}) + (-1)^Nc) = p_{N-1}(\vec{b})e_1(\vec{b}) - p_{N-2}(\vec{b})e_2(\vec{b}) + \dots + (-1)^{N-2}p_1(\vec{b})e_{N-1}(\vec{b}) + (-1)^{N-1}Ne_N(\vec{b}) - Nc = p_N(\vec{b}) - Nc$. Ce qui achève la preuve de la proposition 2.2.6, puisque $p_i(\vec{a}) = m_1a_1^i + m_2a_2^i + \dots + m_pa_p^i$ et $p_i(\vec{b}) = n_1b_1^i + n_2b_2^i + \dots + n_qb_q^i$. \square

Remarque. En général, si on a un arbre, E_0 est automatiquement satisfaite puisque que l'on connaît N qui est égal au nombre d'arêtes du graphe. E_N permet de déterminer c , si bien sûr, on connaît les a_i, b_i . En effet $c = \frac{n_1b_1^N + n_2b_2^N + \dots + n_qb_q^N - m_1a_1^N + m_2a_2^N + \dots + m_pa_p^N}{N}$. Ainsi il faut solutionner les équations E_1, E_2, \dots, E_{N-1} . Par contre, il faut éliminer les solutions où $a_i = b_j$ ou $c = 0$, car sinon $A(z) = B(z)$. Alors on prend pour chaque solution conforme à nos objectifs, $P(z) = \frac{A(z)}{c}$. Comme on a les équations E_1, E_2, \dots, E_{N-1} , ceci nous informe qu'il y a $N - 1$ équations. Ces équations ont pour inconnues $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$. Ce qui donne $p + q$ inconnues. On ne compte pas le c , puisqu'il est donné en résolvant le système d'équations. Il est intéressant de remarquer, que pour un arbre, $p + q$ est égal au nombre de sommets de l'arbre et N le

nombre d'arêtes. On a bien que $p + q = N + 1$, puisqu'il est bien connu que le nombre de sommets d'un arbre est égal au nombre d'arêtes plus 1. On a donc une différence de deux entre le nombre d'inconnue $N + 1$ et le nombre d'équations $N - 1$. En général, c'est pour cette raison que l'on donne des valeurs simples à deux inconnues. Ceci nous donne du coup un système de $N - 2$ équations à $N - 2$ inconnues pour déterminer les autres inconnues. Pour faciliter les calculs, on pose souvent $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. Afin de nous permettre de résoudre efficacement le système de la proposition 2.2.6, on peut utiliser la méthode suivante.

2.2.2 Méthode de Newton-Raphson

Rappelons d'abord la méthode de Newton-Raphson classique. L'algorithme de Newton-Raphson en une dimension sert à approximer les valeurs des zéros d'une fonction.

Lemme 2.2.7. (L'algorithme de Newton – Raphson) *Supposons que x_n soit une approximation d'un zéro r de $f(x) = 0$. Alors $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est en général une meilleure approximation de r . En fait, si la dérivée seconde existe et est continue autour de r et que r est un zéro simple de $f(x)$, (que l'on peut écrire $f(x) = (x - r)g(x)$, tel que $g(x) \neq 0$, ou si on préfère, la tangente en r n'est pas nulle), alors pour toute première approximation, x_0 , suffisamment proche de r , la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge rapidement vers r , au sens où $|x_{n+1} - r| \leq c|x_n - r|^2$, si n tend vers l'infini.*

Nous aurons besoin de la version multidimensionnelle de la méthode de Newton-Raphson pour résoudre le système de Couveignes.

Définition 2.2.8. La matrice Jacobienne de la fonction vectorielle $\vec{f}(\vec{x})$ est la matrice ses dérivées partielles. Plus précisément, elle est définie comme suit,

$$(\vec{f}'(\vec{x}_n)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\vec{x}_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\vec{x}_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\vec{x}_n) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_n) \right]_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Lemme 2.2.9. (L'algorithme de Newton – Raphson en n dimensions) On considère le système de k équations à k inconnues suivant

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0,$$

où $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ et $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ que l'on peut écrire sous une forme explicite comme suit, $f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$. Si $\vec{x}_0 = [x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,k}]^T$ est une approximation assez bonne d'une solution $[r_1, r_2, \dots, r_k]^T$, alors la suite d'approximations $\vec{x}_n = [x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k}]^T$ définie par $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - (\vec{f}'(\vec{x}_n))^{-1} \vec{x}_n$ converge très rapidement vers la solution \vec{r} au sens où $\|\vec{x}_{n+1} - \vec{r}\| \leq c \|\vec{x}_n - \vec{r}\|^2$. De façon précise, l'itération s'écrit

$$\begin{bmatrix} x_{(n+1),1} \\ x_{(n+1),2} \\ \vdots \\ x_{(n+1),k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\vec{x}_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\vec{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\vec{x}_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}_n) \\ f_2(\vec{x}_n) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}_n) \end{bmatrix}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, le calcul des polynômes de Shabat, le système d'équations E_1, E_2, \dots, E_{n-1} de la proposition 2.2.6, prend la forme suivante en posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$

$$\begin{aligned} m_2 a_2 + m_3 a_3 + \dots + m_p a_p - n_1 - n_2 b_2 - n_3 b_3 - \dots - n_q b_q &= 0 \\ m_2 a_2^2 + m_3 a_3^2 + \dots + m_p a_p^2 - n_1 - n_2 b_2^2 - n_3 b_3^2 - \dots - n_q b_q^2 &= 0 \\ &\vdots \\ m_2 a_2^{N-1} + m_3 a_3^{N-1} + \dots + m_p a_p^{N-1} - n_1 - n_2 b_2^{N-1} - n_3 b_3^{N-1} - \dots - n_q b_q^{N-1} &= 0 \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables, $M_1 = m_2, M_2 = m_3, \dots, M_{p-1} = m_p, M_p = -n_2, M_{p+1} = -n_3, \dots, M_{p+q-2} = -n_q$ et $x_1 = a_2, x_2 = a_3, \dots, x_{p-1} = a_p, x_p = b_2, x_{p+1} = b_3, \dots, x_{p+q-2} = b_q$. Finalement en posant $k = p + q - 2$, le système devient beaucoup plus élégant (où $n_1 = n$)

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots + M_k x_k - n = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = M_1x_1^2 + M_2x_2^2 + \dots + M_kx_k^2 - n = 0$$

$$\vdots$$

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = M_1x_1^k + M_2x_2^k + \dots + M_kx_k^k - n = 0$$

Ce qui nous donne k équations à k inconnues. Il ne reste plus qu'à appliquer Newton-Raphson.

Comme le mentionne Couveignes dans (Couveignes, 1994), une des raisons pour utiliser la méthode de Newton, est que si $\deg A(z)$ est grand, alors la méthode symbolique pour trouver les polynômes de Shabat est longue et coûteuse. Donc, si on est chanceux, on peut trouver par tâtonnement une approximation initiale d'une solution du système de Couveignes, qui convergera vers la vraie solution. Par contre, l'article de Couveignes ne mentionne pas les détails suivants.

Théorème 2.2.10. *Si $[x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{k,0}]$ est une approximation initiale suffisamment proche d'une solution du système,*

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = M_1x_1 + M_2x_2 + \dots + M_kx_k - n = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = M_1x_1^2 + M_2x_2^2 + \dots + M_kx_k^2 - n = 0$$

$$\vdots$$

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = M_1x_1^k + M_2x_2^k + \dots + M_kx_k^k - n = 0$$

où $M_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, i = 1..k$, alors la méthode de Newton-Raphson multidimensionnelle va donner une approximation plus précise, $[x_{1,*}, x_{2,*}, \dots, x_{k,*}]$, défini de la manière suivante :

$$x_{i,*} = x_{i,0} - g_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{k,0})$$

où

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^k \frac{f_j(x_1, x_2, \dots, x_k)}{jM_i} [z^{j-1}] \frac{(z-x_1) \cdots \widehat{(z-x_i)} \cdots (z-x_k)}{(x_i-x_1) \cdots \widehat{(x_i-x_i)} \cdots (x_i-x_k)},$$

où $\widehat{(t)}$ signifie qu'on omet le facteur (t) et $[z^r]p(z)$ signifie que l'on choisit le coefficient de z^r dans le polynôme $p(z)$, $r \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Puisque $f_i = \sum_{j=1}^k M_j x_j^i - n$, on a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = i M_j x_j^{i-1}$. Posons

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} - \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right]^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{bmatrix}.$$

Mais

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right] = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \cdots & M_k \\ 2M_1 x_1 & 2M_2 x_2 & 2M_3 x_3 & \cdots & 2M_k x_k \\ 3M_1 x_1^2 & 3M_2 x_2^2 & 3M_3 x_3^2 & \cdots & 3M_k^2 x_k \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ kM_1 x_1^{k-1} & kM_2 x_2^{k-1} & kM_3 x_3^{k-1} & \cdots & kM_k x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

On doit inverser $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right]$. Considérons plutôt la transposée,

$$\begin{bmatrix} M_1 & 2M_1 x_1 & 3M_1 x_1^2 & \cdots & kM_1 x_1^{k-1} \\ M_2 & 2M_2 x_2 & 3M_2 x_2^2 & \cdots & kM_2 x_2^{k-1} \\ M_3 & 2M_3 x_3 & 3M_3 x_3^2 & \cdots & kM_3 x_3^{k-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ M_k & 2M_k x_k & 3M_k x_k^2 & \cdots & kM_k x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

et le système, $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right]^t \vec{u} = \vec{v}$, successivement pour $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$, \dots , $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{bmatrix} M_1 & 2M_1 x_1 & 3M_1 x_1^2 & \cdots & kM_1 x_1^{k-1} \\ M_2 & 2M_2 x_2 & 3M_2 x_2^2 & \cdots & kM_2 x_2^{k-1} \\ M_3 & 2M_3 x_3 & 3M_3 x_3^2 & \cdots & kM_3 x_3^{k-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ M_k & 2M_k x_k & 3M_k x_k^2 & \cdots & kM_k x_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}.$$

Ceci revient à résoudre le système suivant

$$\begin{aligned}
 M_1 u_1 + 2M_1 u_2 x_1 + 3M_1 u_3 x_1^2 + \dots + kM_1 u_k x_1^{k-1} &= v_1 \\
 M_2 u_1 + 2M_2 u_2 x_2 + 3M_2 u_3 x_2^2 + \dots + kM_2 u_k x_2^{k-1} &= v_2 \\
 &\vdots \\
 M_k u_1 + 2M_k u_2 x_k + 3M_k u_3 x_k^2 + \dots + kM_k u_k x_k^{k-1} &= v_k.
 \end{aligned}$$

Posons $P(z) = u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \dots + ku_k z^{k-1}$. On doit alors, pour le vecteur \vec{v} donné, résoudre le système $P(x_1) = \frac{v_1}{M_1}, P(x_2) = \frac{v_2}{M_2}, \dots, P(x_k) = \frac{v_k}{M_k}$ afin de déterminer \vec{u} . Donc $P(z)$ est le polynôme de Lagrange associé aux deux vecteurs $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ et $[\frac{v_1}{M_1}, \frac{v_2}{M_2}, \dots, \frac{v_k}{M_k}]$. C'est-à-dire $P(z) = \text{Lagrange}([x_1, x_2, \dots, x_k], [\frac{v_1}{M_1}, \frac{v_2}{M_2}, \dots, \frac{v_k}{M_k}], z)$ et $iu_i = [z^{i-1}]P(z)$, où $[z^\nu]P(z)$ désigne le coefficient de z^ν dans $P(z)$. En d'autres termes, par le théorème de Lagrange,

$$\begin{aligned}
 u_i &= \frac{1}{i} [z^{i-1}] \text{Lagrange}([x_1, x_2, \dots, x_k], [\frac{v_1}{M_1}, \frac{v_2}{M_2}, \dots, \frac{v_k}{M_k}], z) \\
 &= \frac{1}{i} [z^{i-1}] \sum_{j=1}^k \frac{v_j}{M_j} \cdot \frac{(z-x_1) \cdots \widehat{(z-x_j)} \cdots (z-x_k)}{(x_j-x_1) \cdots \widehat{(x_j-x_j)} \cdots (x_j-x_k)}
 \end{aligned}$$

Pour obtenir les colonnes de la matrice $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right]^t \right)^{-1}$ il faut considérer successivement les vecteurs \vec{v} de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right]^t \right)^{-1}_{i,j} = \frac{1}{i} [z^{i-1}] \frac{1}{M_j} \cdot \frac{(z-x_1) \cdots \widehat{(z-x_j)} \cdots (z-x_k)}{(x_j-x_1) \cdots \widehat{(x_j-x_j)} \cdots (x_j-x_k)}$. Mais on veut $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right] \right)^{-1}_{i,j} = \left(\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right]^t \right)^{-1} \right)_{j,i}$. Donc, $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right] \right)^{-1}_{i,j} = \frac{1}{j} [z^{j-1}] \frac{1}{M_i} \cdot \frac{(z-x_1) \cdots \widehat{(z-x_i)} \cdots (z-x_k)}{(x_i-x_1) \cdots \widehat{(x_i-x_i)} \cdots (x_i-x_k)}$. En définitive,

$$\left(\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) \right] \right)^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\vec{x}) \\ g_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_k(\vec{x}) \end{bmatrix} \text{ où } g_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{f_j}{j} [z^{j-1}] \frac{1}{M_i} \cdot \frac{(z-x_1) \cdots \widehat{(z-x_i)} \cdots (z-x_k)}{(x_i-x_1) \cdots \widehat{(x_i-x_i)} \cdots (x_i-x_k)}$$

et on trouve

$$\begin{bmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\vec{x}_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\vec{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\vec{x}_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}_n) \\ f_2(\vec{x}_n) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}_n) \end{bmatrix}.$$

On conclut en posant $\vec{x} = [x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{k,0}]$ et $\vec{X} = [x_{1,\star}, x_{2,\star}, \dots, x_{k,\star}]$. \square

2.2.3 Une autre méthode

Il est facile de voir que l'identité polynomiale $A(z) = c + B(z)$ où $A(z) = (z - a_1)^{m_1}(z - a_2)^{m_2} \cdots (z - a_p)^{m_p}$ et $B(z) = (z - b_1)^{n_1}(z - b_2)^{n_2} \cdots (z - b_q)^{n_q}$ est équivalente au système d'équations suivant.

$$A(b_1) = c, A(b_2) = c, \dots, A(b_q) = c, B(a_1) = -c, B(a_2) = -c, \dots, B(a_p) = -c,$$

$$(-1)^N a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_p^{m_p} = c + (-1)^N b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_q^{n_q}$$

que l'on peut réécrire,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^p (b_1 - a_i)^{m_i} &= c, \prod_{i=1}^p (b_2 - a_i)^{m_i} = c, \dots, \prod_{i=1}^p (b_q - a_i)^{m_i} = c, \\ \prod_{j=1}^q (a_1 - b_j)^{n_j} &= -c, \prod_{j=1}^q (a_2 - b_j)^{n_j} = -c, \dots, \prod_{j=1}^q (a_p - b_j)^{n_j} = -c, \\ (-1)^N a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_p^{m_p} &= c + (-1)^N b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_q^{n_q}. \end{aligned}$$

Cela revient aux $p + q$ équations

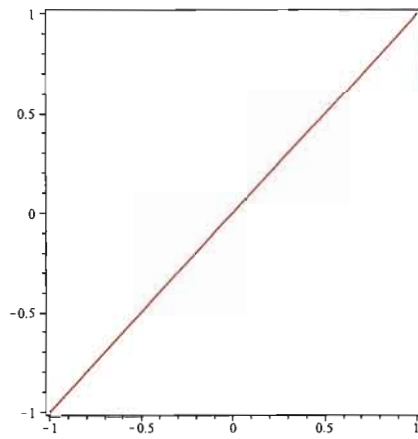
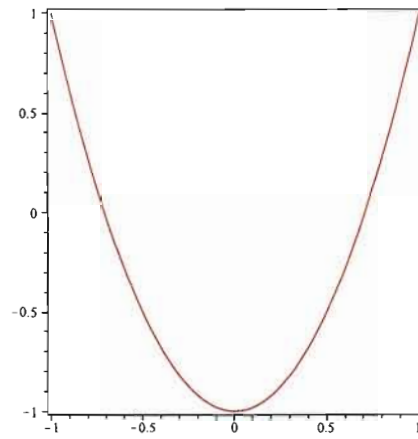
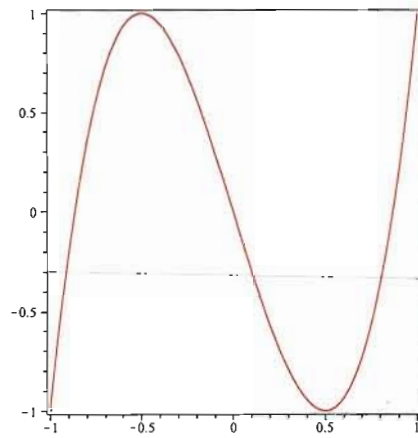
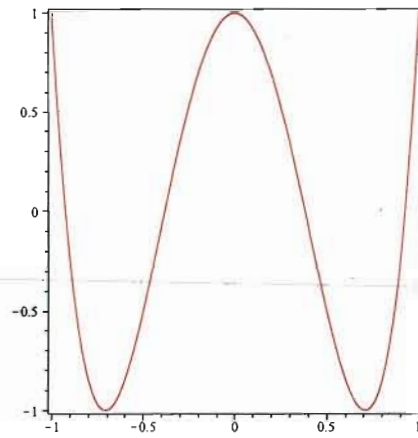
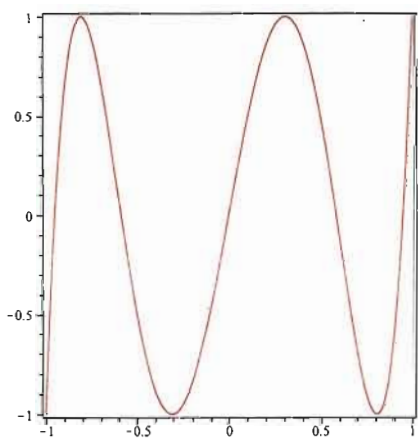
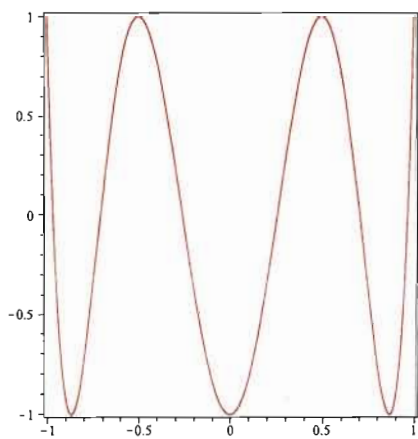
$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^p (b_j - a_i)^{m_i} &= (-1)^N a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_p^{m_p} - (-1)^N b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_q^{n_q}, \quad 1 \leq j \leq q, \\ \prod_{j=1}^q (a_i - b_j)^{n_j} &= (-1)^N b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_q^{n_q} - (-1)^N a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_p^{m_p}, \quad 1 \leq i \leq p. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent, par une manipulation des signes, à

$$\prod_{i=1}^p (a_i - b_j)^{m_i} = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_p^{m_p} - b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_q^{n_q}, \quad 1 \leq j \leq q,$$

$$\prod_{j=1}^q (b_j - a_i)^{n_j} = b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_q^{n_q} - a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_p^{m_p}, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Il suffit de prendre ce système d'équations et de le résoudre avec Maple pour trouver les a_i, b_j , en posant $c = (-1)^N a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_p^{m_p} - (-1)^N b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_q^{n_q}$. Une fois le calcul effectué, il ne reste qu'à prendre les solutions qui nous intéressent, soit celles où $a_i \neq b_j$ et $c \neq 0$. Et donc on a $P(z) = \frac{A(z)}{c}$.

(a) $T_1(x)$ (b) $T_2(x)$ (c) $T_3(x)$ (d) $T_4(x)$ (e) $T_5(x)$ (f) $T_6(x)$ **Figure 2.1** Polynôme de Tchebychev pour $1 \leq n \leq 6$.

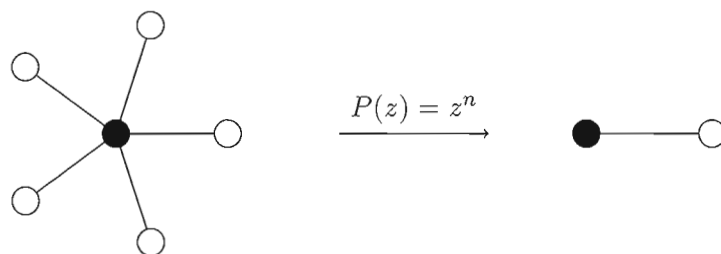


Figure 2.2 À gauche, l'image inverse de l'intervalle $[0,1]$ par $P(z) = z^5$.



Figure 2.3 À gauche, l'image inverse, à homéomorphisme près, de l'intervalle $[-1,1]$ par $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$.

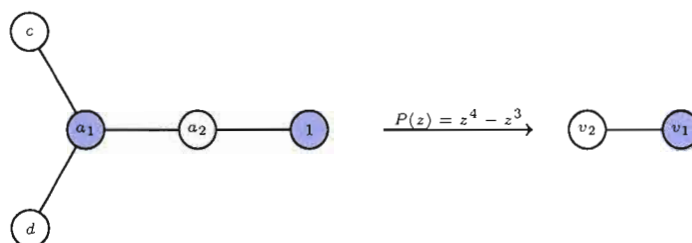


Figure 2.4 À gauche, l'image inverse (à homéomorphisme près) de l'intervalle $[0, -27/256]$ par $P(z) = z^4 - z^3$.

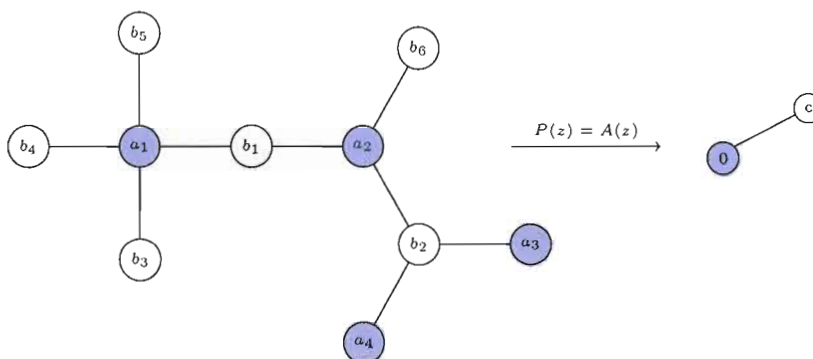


Figure 2.5 À gauche, l'arbre bicolore est l'image inverse (à homéomorphisme près) du segment $[0, c]$.

CHAPITRE III

CACTUS ET OBJETS ÉQUIVALENTS

Ce chapitre est consacré aux cactus. Les cactus sont aussi appelés arbres de Husimi. Le physicien japonais Kodi Husimi, dans (Husimi, 1950), a défini ces arbres pour des problèmes en théorie de la condensation en mécanique statistique. Ce chapitre porte sur le côté combinatoire de ce type de graphes que sont les cactus. L'engouement pour les cactus provient de la classification topologique des polynômes complexes qui ont m valeurs critiques. Cet emballement commença au 19ième siècle, vers les années 1870. Un des grands mathématiciens à s'y intéresser a été Adolf Hurwitz (Hurwitz, 1891). Deux polynômes $P_1, P_2 : S^2 \rightarrow S^2$, sont topologiquement équivalents, s'il existe deux homéomorphismes préservant l'orientation, $h_1, h_2 : S^2 \rightarrow S^2$, tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{h_1} & S^2 \\ P_1 \downarrow & & \downarrow P_2 \\ S^2 & \xrightarrow{h_2} & S^2 \end{array}$$

En joignant les m valeurs critiques de P , on obtient un polygone à m côtés. En fait, la préimage de ce polygone est un cactus m -aire ! Inversement, on peut montrer que pour tout cactus m -aire, il existe (à équivalence près) un polynôme $P(z)$ dont la préimage d'un polygone simple joignant les valeurs critiques soit le cactus donné. Ce résultat découle encore du théorème d'existence de Riemann. Nous renvoyons le lecteur au livre de Zvonkin, Lando et Zagier (Lando et Zvonkin, 2004) pour une analyse détaillée. Dans le but de classer les polynômes, il est donc naturel d'établir des bijections entre les cactus et divers objets mathématiques. Dans ce chapitre, nous allons en voir trois. Pour

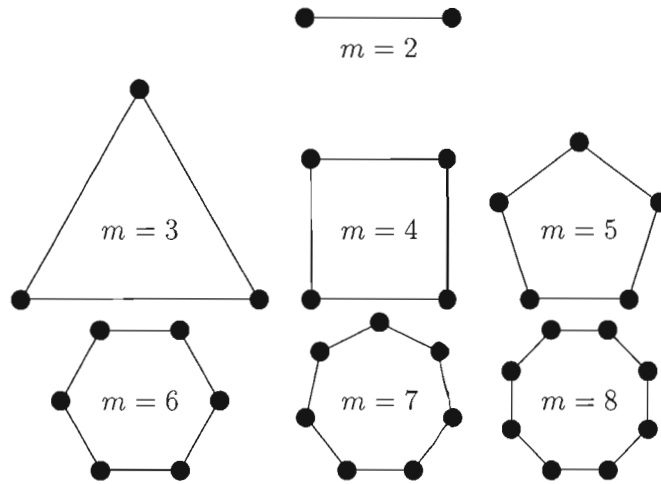


Figure 3.1 Polygones à m côtés

établir ces bijections, nous allons nous servir de la théorie des espèces, théorie efficace et souvent imagée, permettant d'obtenir les relations voulues. La majeure partie des résultats suivants sont inspirés de (Bousquet, 1999).

3.1 Quelques définitions préalables

Définition 3.1.1. Un cactus est un graphe simple connexe où chaque arête appartient à exactement un cycle élémentaire.

Remarque. Les cycles élémentaires sont en fait des polygones. Si un polygone possède m côtés, on dit que c'est un m -gone. Pour $m = 2$ on a une arête.

Voir la figure 3.1 pour quelques exemples de m -gones et la figure 3.2 pour un cactus quelconque.

Définition 3.1.2. Un cactus plan est un plongement d'un cactus dans le plan, où deux polygones quelconques sont reliés par un unique sommet et chaque arête touche la partie infinie du plan.

Définition 3.1.3. Un m -cactus est un cactus dont tous les polygones sont des m -gones.

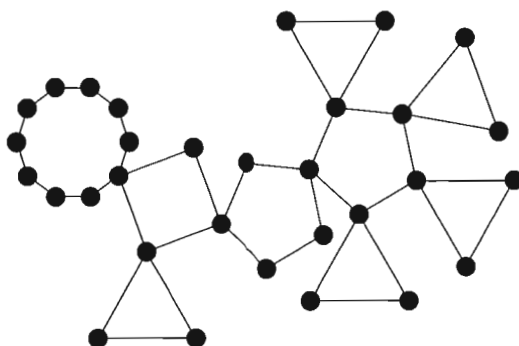


Figure 3.2 Un cactus avec diverses valeurs de m

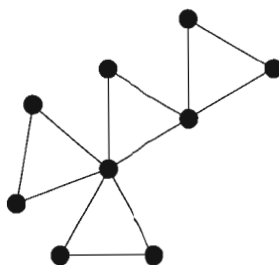


Figure 3.3 Un 3-cactus

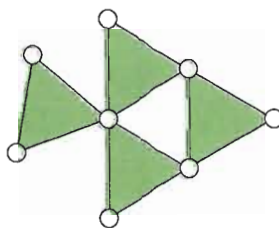


Figure 3.4 Il y a un 3-cycle de 3-gones

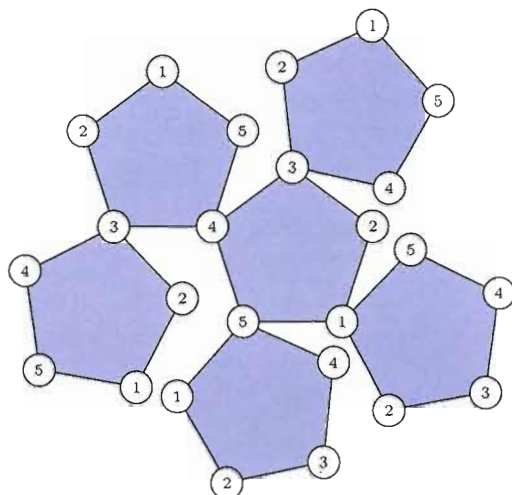


Figure 3.5 Un cactus 5-aire colorié de 1 à 5

Un cactus m -aire est un m -cactus plan dont tous les sommets de chaque m -gone sont coloriés dans le sens anti-horaire, avec des couleurs de 1 à m . Pour $m = 1$, on a tout de même un cactus, c'est un cactus 1-aire, dégénéré en un seul sommet.

La figure 3.3 donne un exemple d'un 3-cactus, c'est-à-dire formé seulement de triangles. La figure 3.4 représente ce que l'on ne veut pas. C'est-à-dire, des cycles de polygones. La figure 3.5 illustre un cactus 5-aire.

Définition 3.1.4. Un cactus m -aire enraciné est un cactus m -aire dont l'un de ses m -gones est distingué. Voir figure 3.6.

Définition 3.1.5. Une m -étoile est un graphe plan muni d'un sommet noir au centre de m sommets blancs coloriés de 1 à m et relié à ceux-ci. Voir figure 3.7.

Pour compter le nombre de cactus et établir des bijections entre les cactus, les arborescences bicolorées et les factorisations m -aires d'un certain p -cycle, nous utiliserons la théorie des espèces.

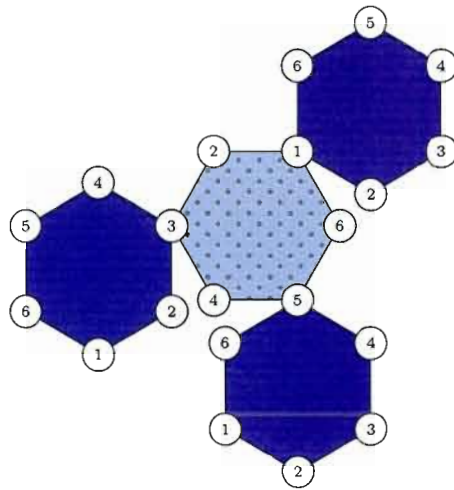


Figure 3.6 Un 6-cactus enraciné

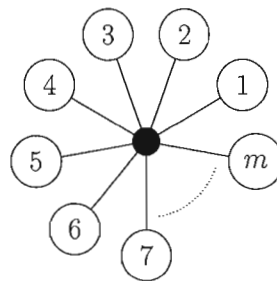
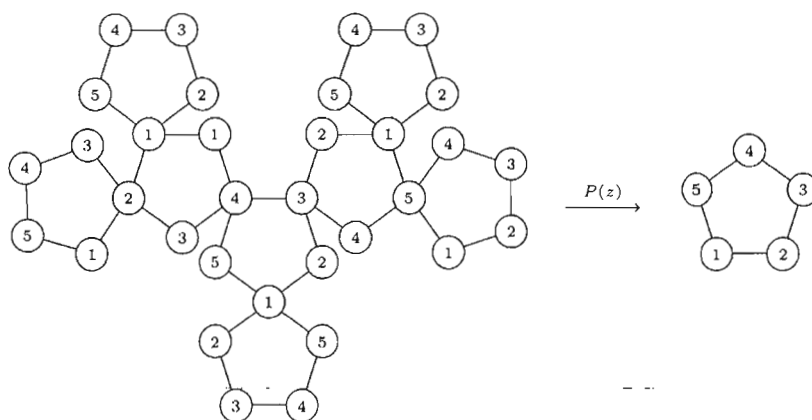


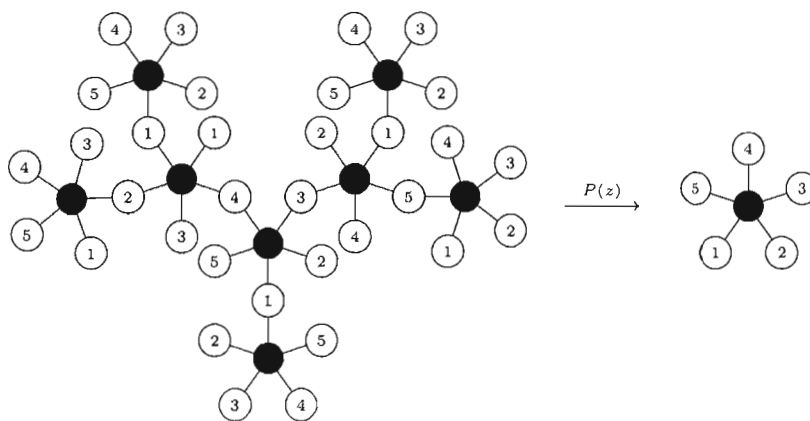
Figure 3.7 Une m -étoile

3.2 Cactus vs arbres plans bicolores

Un m -gone simple peut être représenté par une m -étoile reliant un point de son intérieur à chacun de ses sommets par m « rayons ». Si ce m -gone relie les m valeurs critiques d'un polynôme $P(z)$, la figure 3.8 montre que l'image inverse du m -gone par le polynôme P peut être représentée comme l'image inverse d'une m -étoile. Cette structure s'appelle un arbre plan bicolore d'ordre m . Étudions plus à fond ce genre de structure arborescente.



(a) L'image inverse d'un polygone, par un polynôme, donne un cactus.



(b) L'image inverse d'une m -étoile, par un polynôme, donne un arbre bicolore.

Figure 3.8 L'image inverse, par un polynôme

On note $\mathbf{a}_{C_m, C} = \mathbf{a}_{C_m, C}(X, Y)$ l'espèce à deux sortes, des arbres plans bicolores d'ordre m . Ici, X représente les sommets noirs et Y les blancs. Chaque sommet noir est adjacent

à m sommets blancs. La notation $\mathbf{a}_{C_m, C}(X, Y)$ signifie que pour chaque sommet noir, on enrichit d'une C_m -structure tous les sommets blancs qui lui sont associés et que l'on enrichit d'une C -structure tous les sommets noirs reliés à un sommet blanc. Les notations C_m et C représentent respectivement l'espèce des cycles de longueur m et l'espèce des cycles de longueur quelconque. Ceci est dû au fait que la structure est planaire et que l'on connaît le nombre m de sommets blancs attachés à un sommet noir et qu'on ne connaît pas le nombre de sommets noirs attachés à un sommet blanc. L'espèce des $\mathbf{a}_{C_m, C}$ -structures pointées en une arête est notée des $\mathbf{a}_{C_m, C}^{\bullet-\circ}$, puisque chaque arête possède un sommet noir et un sommet blanc. Notons $\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet}$ l'espèce des arborescences bicolorées qui ont une racine noire et dont la fibre de chaque sommet noir est enrichie d'une L_{m-1} -structure et dont les sommets blancs sont enrichis d'une L -structure. Ici, L_{m-1} et L désignent respectivement l'espèce des ordres linéaires de longueur $m-1$ et l'espèce des ordres linéaires de longueur quelconque. On a aussi $\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}$ l'espèce des arborescences bicolorées qui ont une racine blanche et dont la fibre de chaque sommet blanc est enrichie d'une L -structure et les sommets noirs sont enrichis d'une L_{m-1} -structure.

Ainsi on a les trois équations combinatoires suivantes :

$$\mathbf{a}_{C_m, C}^{\bullet-\circ} = \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet} \cdot \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ},$$

$$\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet} = XL_{m-1}(\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}),$$

$$\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ} = YL(\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet}).$$

La première égalité est évidente et est représentée à la figure 3.9. La deuxième égalité est représentée à la figure 3.10. La troisième s'établit et se représente de façon semblable à la deuxième.

Pour p sommets noirs, on a $(m-1)p + 1$ sommets blancs dans les $\mathbf{a}_{C_m, C}$ -structures. En effet, pour le premier m -gone, on compte m sommets blancs. Pour tous les autres m -gones, on compte $m-1$ sommets blancs, puisque les m -gones sont reliés par des sommets blancs. Ainsi on a $(m-1)p$ sommets blancs pour les p m -gones. Par contre, il faut ajouter 1 pour le premier m -gone compté. Donc au total on a $(m-1)p + 1$

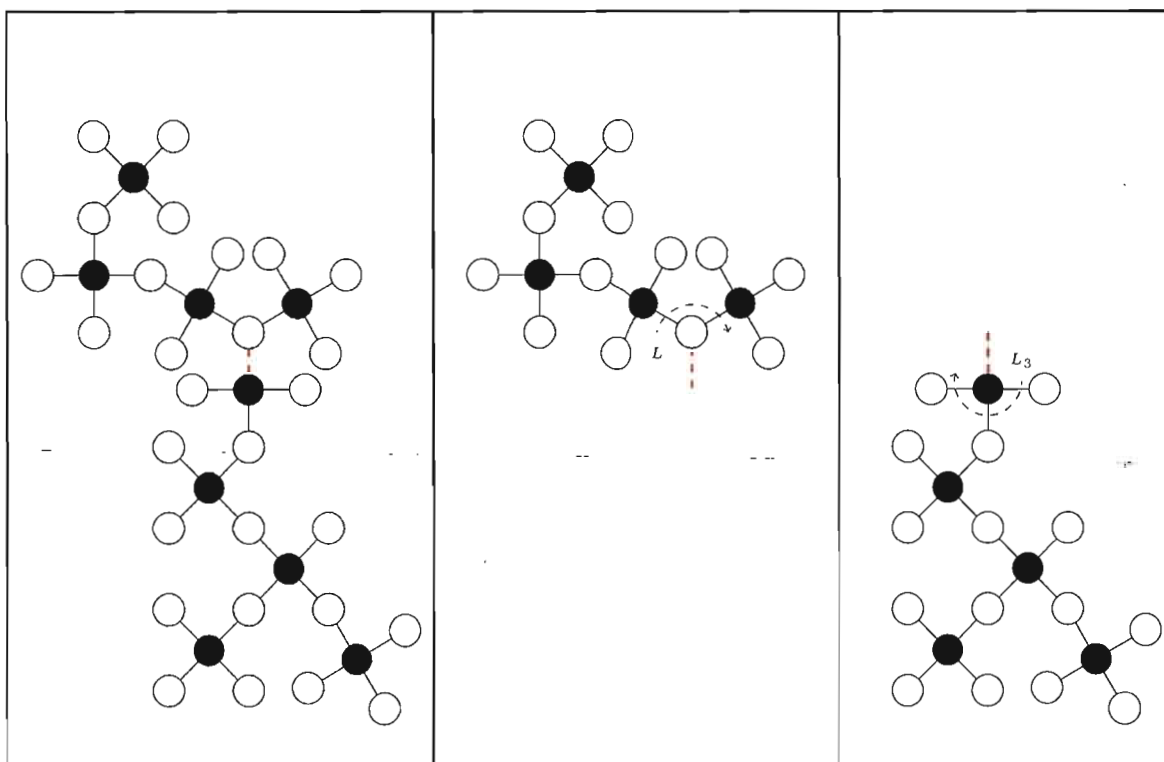


Figure 3.9 $a_{C_m, C}^{\bullet-\circ} = \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet} \cdot \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}$

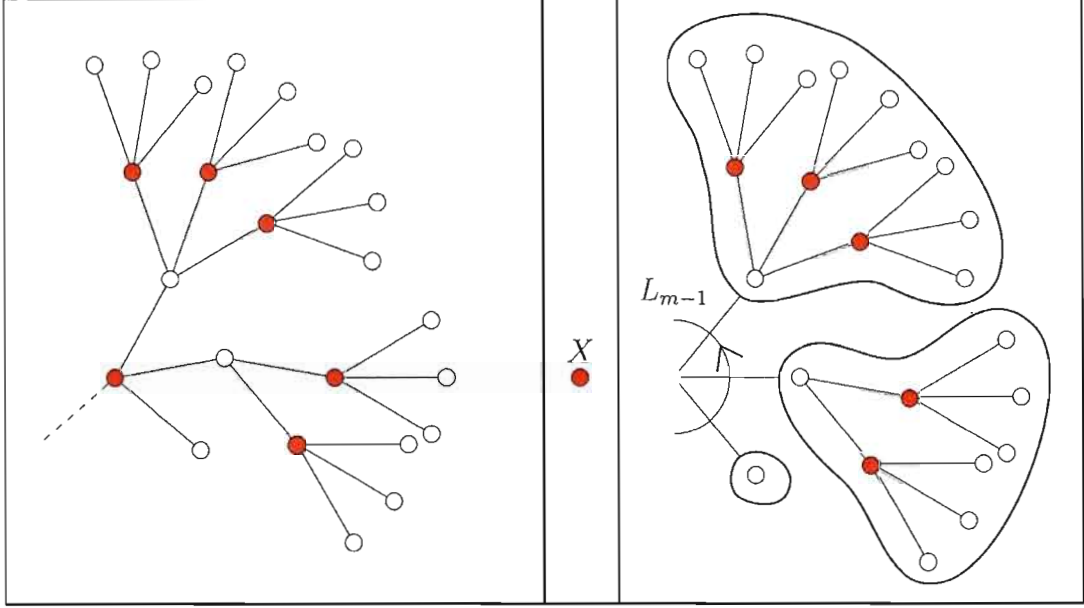


Figure 3.10 $\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet = XL_{m-1}(\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\circ)$

sommets blancs.

Notons $\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\circ$ l'ensemble des cactus m -aires enracinés en un m -gone qui ne sont pas étiquetés et qui ont p m -gones.

Ainsi, le nombre de cactus m -aires enracinés qui ne sont pas étiquetés et qui ont p m -gones est

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\circ| = [x^p y^{(m-1)p+1}] (\widetilde{\mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ}})(x, y)$$

Mais puisque l'espèce $\mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ}$ est asymétrique, la seule permutation qui laisse fixe la structure est l'identité, on a donc au niveau des séries génératrices tilda,

$$(\widetilde{\mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ}})(x, y) = \mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ}(x, y).$$

Comme on a $\mathbf{a}_{C_m, C}^{\bullet \circ} = \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet} \cdot \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}$, on en tire l'équation

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^{\circ}| = [x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet}(x, y) \cdot \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}(x, y).$$

Puisque $L_{m-1}(x) = x^{m-1}$, l'espèce des aborescences bicolorées avec une racine noire, $\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet} = X L_{m-1}(\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ})$ devient, en passant aux séries génératrices,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet}(x, y) &= X(x)(L_{m-1} \circ \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ})(x, y) \\ &= x(L_{m-1}(\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}(x, y))) \\ &= x(\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}(x, y))^{m-1}. \end{aligned}$$

Résultat que l'on a obtenu par les propriétés de multiplication et de composition, $(F \cdot G)(X, Y) = F(X, Y)G(X, Y)$ et $(F \circ G)(X, Y) = F(G(X, Y))$.

De la même façon, puisque $L(x) = \frac{1}{1-x}$, l'égalité $(\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}) = Y L(\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet})$ devient, en passant aux séries génératrices,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}(x, y) &= Y(y)(L \circ \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet})(x, y) \\ &= yL(\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet}(x, y)) \\ &= y \cdot 1/(1 - (\mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet}(x, y))). \end{aligned}$$

Pour trouver le coefficient de $[x^p y^{(m-1)p+1}]$ dans $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^{\circ}| = [x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\bullet} \cdot \mathcal{A}_{L_{m-1}, L}^{\circ}$, on utilise la proposition suivante qui est la version bi-dimensionnelle alternée de la formule d'inversion de Lagrange. Ce coefficient est celui qui nous donnera le nombre d'arborescences bi-colorées avec p sommets noirs et $(m-1)p+1$ sommets blancs, qui est en fait le nombre de cactus, comme nous allons le voir plus tard.

Proposition 3.2.1. (Formule de Chottin) *Si deux séries formelles $A(x, y)$ et $B(x, y)$ satisfont les conditions*

$$A(x, y) = x\varphi(B(x, y)),$$

$$B(x, y) = y\psi(A(x, y)),$$

alors on a

$$[x^n y^k] A^\alpha B^\beta = \left(1 - \frac{(n-\alpha)(k-\beta)}{kn}\right) [s^{n-\alpha} t^{k-\beta}] \varphi^n(t) \psi^k(s)$$

On ne démontre pas cette proposition. On peut trouver la preuve du cas général (n dimension) dans la thèse de Michel Bousquet, voir (Bousquet, 1999). Montrons comment fonctionne cette proposition dans le cas qui nous intéresse.

Ici, $\varphi(t) = t^{m-1}$, $\psi(t) = \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1}$, $\alpha = \beta = 1$, $A = \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\bullet$, $B = \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\circ$, $n = p$ et $k = (m-1)p + 1$. Ainsi on a

$$[x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\bullet \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\circ = \left(1 - \frac{(p-1)[(m-1)p+1-1]}{p[(m-1)p+1]} \right) [s^{p-1} t^{(m-1)p}] (1-s)^{-((m-1)p+1)} t^{(m-1)p}. \quad (3.1)$$

Comme il n'y a pas de coefficient en s dans $\varphi^p(t)$ et qu'il n'y a pas de coefficient en t dans $\psi^{(m-1)p+1}$, alors on peut séparer $[s^{p-1} t^{(m-1)p}]$ en $[s^{p-1}]$ et $[t^{(m-1)p}]$. Ce qui donne

$$[x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\bullet \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\circ = \left(1 - \frac{(p-1)[(m-1)p+1-1]}{p[(m-1)p+1]} \right) [s^{p-1}] (1-s)^{-((m-1)p+1)} [t^{(m-1)p}] t^{(m-1)p}.$$

Le coefficient de $t^{(m-1)p}$ dans $t^{(m-1)p}$ est 1. De plus, en mettant sur le même dénominateur, on a

$$\left(1 - \frac{(p-1)[(m-1)p+1-1]}{p[(m-1)p+1]} \right) = \left(\frac{m}{p(m-1)+1} \right).$$

Ainsi on a que

$$[x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\bullet \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\circ = \left(\frac{m}{p(m-1)+1} \right) [s^{p-1}] (1-s)^{-((m-1)p+1)}.$$

Mais, par la série binomiale,

$$(1-s)^{-k} = \sum_{j \geq 0} \binom{k+j-1}{j} s^j = \sum_{j \geq 0} \frac{k(k+1) \dots (k+j-1) s^j}{j!}.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{m}{p(m-1)+1} \right) [s^{p-1}] \sum_{i \geq 0} \frac{((m-1)p+1) \dots ((m-1)p+i) s^i}{i!} \\
&= \left(\frac{m}{p(m-1)+1} \right) \frac{((m-1)p+1)((m-1)p+2) \dots ((m-1)p+(p-1))}{(p-1)!}
\end{aligned}$$

En multipliant par $\frac{(m-1)p!}{(m-1)p!}$, on obtient

$$[x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\bullet \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\circ = \left(\frac{m}{p(m-1)+1} \right) \left(\frac{(mp-1)!}{(p-1)!(m-1)p!} \right).$$

En multipliant ensuite par $\frac{p}{p}$, on aboutit à

$$[x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\bullet \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\circ = \left(\frac{1}{p(m-1)+1} \right) \left(\frac{(mp)!}{p(p-1)!(m-1)p!} \right).$$

Ce qui revient à écrire

$$[x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\bullet \mathcal{A}_{L_{m-1,L}}^\circ = \left(\frac{1}{p(m-1)+1} \right) \binom{mp}{p}.$$

De tous ces calculs découle la proposition suivante.

Proposition 3.2.2. *Le nombre de cactus m -aires enracinés et non étiquetés avec p m -gones est*

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\diamond| = \left(\frac{1}{p(m-1)+1} \right) \binom{mp}{p}.$$

Il est connu que $\left(\frac{1}{p(m-1)+1} \right) \binom{mp}{p}$ compte le nombre d'arborescences ordonnées m -aires ayant p sommets, voir (Bergeron, Labelle et Leroux). Nous allons donc établir une bijection entre les cactus m -aires et les arborescences ordonnées m -aires.

3.2.1 Bijection entre les cactus m -aires enracinés et non étiquetés contenant p m -gones et les factorisations m -aires du p -cycle

Nous allons voir qu'il y a aussi une bijection entre l'ensemble des factorisations m -aires du p -cycle $\gamma_p = (12\dots p)$ et l'ensemble des cactus m -aires enracinés et non étiquetés contenant p m -gones. Ceci fera le lien avec la définition 1.2.11 de la notion de cactus. Il y a donc aussi une bijection avec l'ensemble des arborescences ordonnées m -aires.

Définition 3.2.3. L'espèce des arborescences m -aires, notée τ_m , est définie par l'équation combinatoire

$$\tau_m = X(1 + \tau_m)^m.$$

Puisque $L_m(X) = X^m$, $\tau_m = XL_m(1 + \tau_m)$.

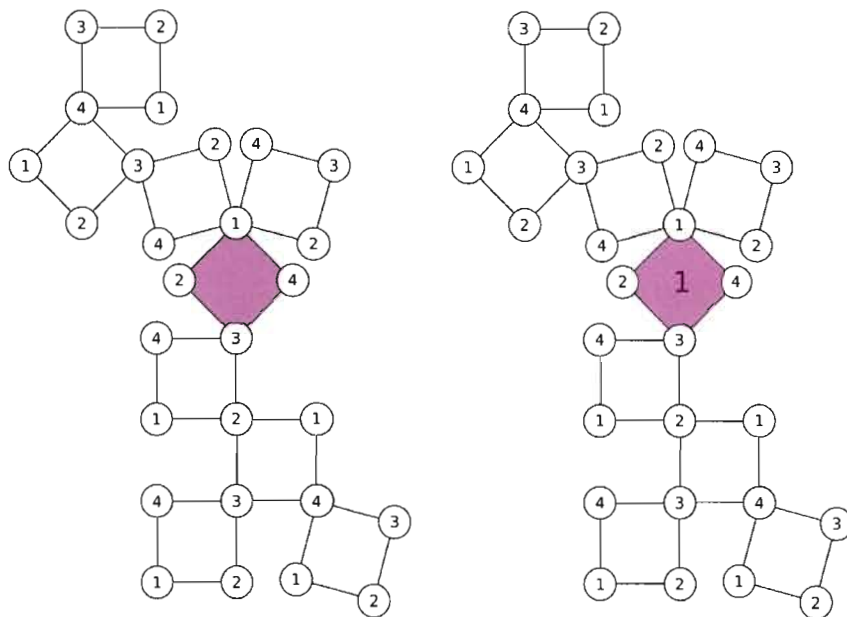
Définition 3.2.4. Une factorisation m -aire du p -cycle $\alpha_p = (1\ 2\ \dots\ p)$ est un m -uplet (g_1, g_2, \dots, g_m) de permutations de \mathbb{S}_p tel que

$$\alpha_p = \prod_{i=1}^m g_i.$$

Il est important de noter que l'on considère la composition de permutations de gauche à droite.

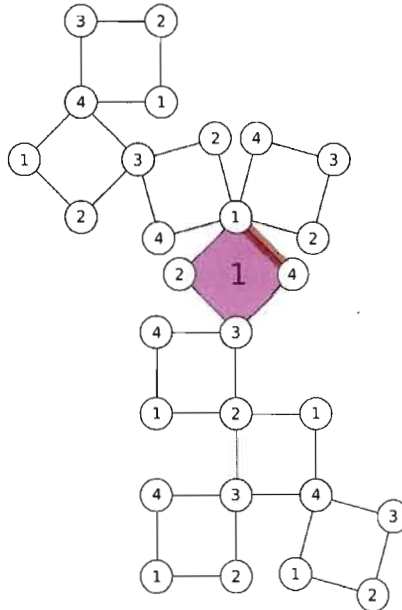
La figure 3.11 est une représentation visuelle de la façon dont l'étiquetage canonique d'un certain cactus se fait, dans le but de mieux visualiser et suivre les opérations. Lorsque l'on donne l'étiquetage canonique aux m -gones d'un cactus m -aire enraciné, il se trouve que l'on obtient une bijection entre l'ensemble des cactus m -aires comportant p m -gones et l'ensemble des factorisations m -aires du p -cycles α_p . C'est un résultat dû à Goulden et Jackson dans (Goulden et Jackson, 1992). L'étiquetage des cactus m -aires se fait comme suit : on prend un cactus et on l'enracine en un m -gone. Au m -gone distingué, on donne l'étiquette 1. On fait ensuite un parcours du cactus par les arêtes de tous les m -gones en choisissant comme point de départ l'arête $(1, m)$ du m -gone distingué. On

parcourt les arêtes en gardant le côté infini à sa droite. On fait comme si on marchait sur les arêtes. Lorsqu'on rencontre une arête $(1, m)$ ou $(m, 1)$, on donne la valeur 2 au m -gone associé à cette arête. On continue le parcours en incrémentant et en donnant les valeurs de 3 à p à tous les autres m -gones, comme on l'a fait pour le deuxième m -gone.



(a) On enracine un des m -gones.

(b) On étiquette le m -gone enraciné de la valeur 1.



(c) On fixe l'arête $(1, m)$ comme point de départ.

Figure 3.11 Étiquetage des m -gones.

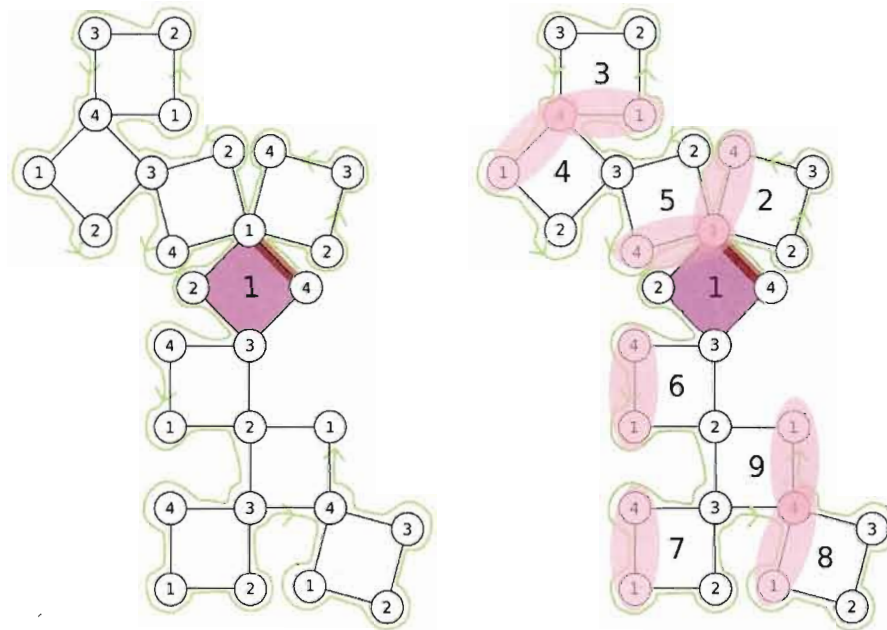


Figure 3.11 Étiquetage des m -gones (suite).

On considère les cycles de m -gones étiquetés autour de chacune des m couleurs. On place, l'un à côté de l'autre, les cycles obtenus d'une même couleur et on le fait pour chaque couleur. La permutation g_i est obtenue en plaçant tous les cycles côte-à-côte, obtenus autour de la couleur i . Dans notre exemple, on a les quatre permutations g_1, g_2, g_3 et g_4 formées de cycles

$$g_1 = (125),$$

$$g_2 = (69),$$

$$g_3 = (16)(79)(45),$$

$$g_4 = (34)(89).$$

Ces quatre permutations constituent le quadruplet (g_1, g_2, g_3, g_4) de S_9 . Ici on effectue le produit des permutations de gauche à droite. On remarque alors que $g_1 g_2 g_3 g_4 = (123456789)$. On a obtenu une factorisation 4-aire du 9-cycle α_9 à partir d'un cactus 4-aire comportant neuf 4-gones. On peut effectuer l'opération inverse à partir de la factorisation m -aire d'un p -cycle α_p . Voici quelques pistes pour vous en convaincre en utilisant le même exemple que ci-haut. On a les permutations g_1, g_2, g_3 et g_4 . L'indice i indique autour de quels sommets on crée un cycle de m -gones. Les cycles des permutations nous indiquent quels m -gones vont constituer les cycles autour des indices i . De plus, le nombre de permutations nous renseigne sur le nombre d'arêtes que vont posséder les m -gones. Le nombre de permutations égale le nombre d'arêtes. Comme on a les permutations g_1, g_2, g_3 et g_4 , il se trouve que chaque polygone aura quatre côtés. Il suffit ensuite d'assembler le tout.

3.2.2 Bijection entre les cactus m -aires enracinés comportant p m -gones et les arborescences m -aires comportant p sommets

Nous allons montrer par construction que cette bijection fonctionne pour $m = 4$. Le cas général, est démontré dans Goulden et Jackson (Goulden et Jackson, 1992). On reprend le même m -cactus à neuf 4-gones de la figure 3.12. On remplace les m -gones par des m -étoiles. On obtient un arbre plan bicolore, avec ses étiquettes canoniquement établies,

voir la figure 3.13. De façon récursive, nous allons obtenir la bijection. On étiquette les sommets noirs d'après les étiquettes des m -gones associés. Le m -gone distingué porte l'étiquette 1 et donc l'étoile de ce m -gones porte l'étiquette 1 pour son sommet noir. L'arête partant du sommet noir étiqueté 1 et reliant le sommet blanc étiqueté 1 sera l'arête distinguée. Pour ce qui suit, on se réfère à la figure 3.16. Le sommet noir étiqueté 1, sommet distingué, sera le père de quatre fils ; le fils gauche sera la structure attachée au sommet 1, le fils central-gauche sera la structure attachée au sommet 2, le fils central droit sera la structure attachée au sommet 3 et le fils droit sera la structure attachée au sommet 4.

Pour effectuer une récurrence, on doit avoir dans chaque sous-structure, un sommet noir distingué. On entre dans une sous-structure par l'arête qui l'a déterminée. Ensuite on distingue le sommet le plus à droite en parcourant les arêtes reliées au sommet désignant la position du fils dans le sens antihoraire. Les flèches sur la figure 3.16 indiquent les sommets distingués de chaque sous-structure. Les sommets ainsi distingués vont jouer le rôle de père dans l'étape effectuée au paragraphe précédent. On recommence ce procédé, jusqu'à l'obtention d'un sommet blanc isolé. On obtient finalement la figure 3.14.

On peut faire les opération inverses en partant de la figure 3.14 et 3.15. Mais comme nous allons voir plus tard, on va pouvoir faire cette opération inverse à partir de la factorisation 4-aire du 9-cycle α_9 .

On peut faire l'opération inverse à partir de la figure 3.14, dû au fait que les sommets blancs, les feuilles de l'arborescence complète 4-aire, portent les étiquettes de 1 à 4 et sont des fils gauches, central-gauches, central-droits et droits. On définit une chaîne comme étant une suite de points. Ici les points sont des sommets. Dans l'arborescence des figure 3.14 et 3.15, on peut remarquer qu'il y a des chaînes gauches, centrales-gauches, centrales-droites et droites. L'ensemble des chaînes gauches correspond aux cycles de la permutation g_1 , l'ensemble des chaînes centrales-gauches correspond aux cycles de la permutations g_2 , l'ensemble des chaînes centrales-droites correspond aux cycles de la permutation g_3 et l'ensemble des chaînes droites correspond aux cycles de la permutation g_4 .

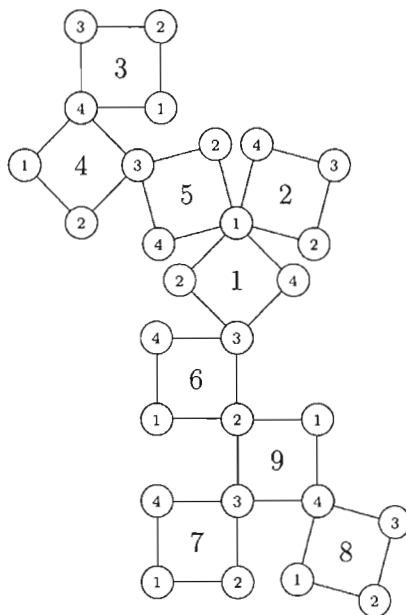


Figure 3.12 9-cactus

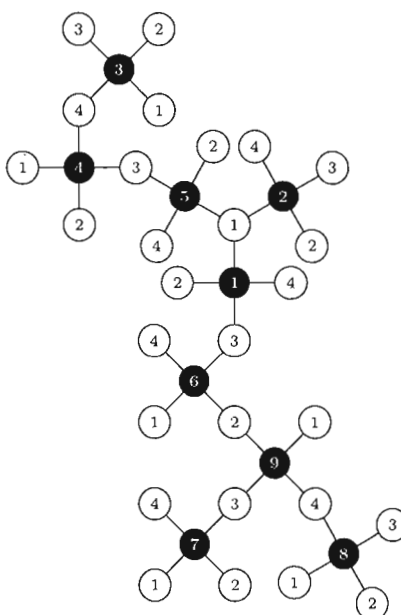


Figure 3.13 Arbre plan bicolore.

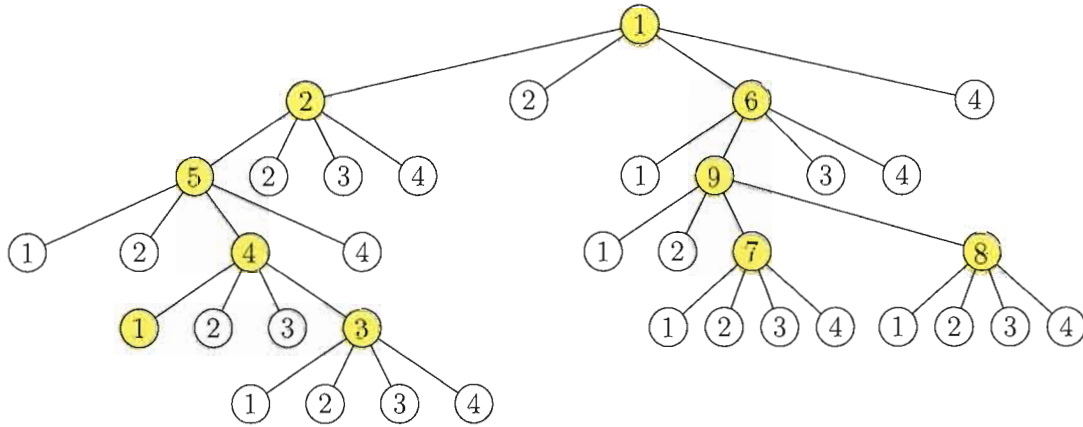


Figure 3.14 Arborescence quaternaire complète (admettant les sommets blancs.)

De la figure 3.15, on peut enlever les étiquettes et encore retrouver notre cactus de départ. En fait, on peut même enlever l'arbre au complet et tout de même retrouver notre cactus de départ, il suffit de regarder la factorisation m -aire du p -cycle $\alpha_p = g_1 g_2 g_3 g_4$. On choisit d'abord une racine et celle-ci porte l'étiquette 1. Avec g_1 on obtient une chaîne droite avec les sommets 1, 2 et 5. Du sommet 5 on peut seulement aller dans g_3 . Ainsi on a une chaîne partant du sommet 5 allant au sommet 4. Cette chaîne, étant définie à partir de g_3 est une chaîne centrale-droite. Du sommet 4 on peut aller dans g_4 . De 4 on a une chaîne droite allant du sommet 4 vers le sommet 3. Maintenant, on est rendu en bas de l'arbre, il faut repartir d'en haut. La permutation g_1 va encore nous amener en bas par le même chemin. Ainsi, on passe à g_3 , puisque qu'il contient 1 dans un de ses cycles. Du sommet 1 on va au sommet 6 par une chaîne centrale-droite. De 6, on va dans g_2 vers le sommet 9 par une chaîne centrale-gauche. On effectue ce procédé, jusqu'à ce l'obtention d'un arbre 4-aire.

Cet arbre n'est pas complet, il manque tous les sommets blancs. On les rajoute en considérant leurs étiquettes comme la position des fils, jusqu'à ce qu'il soit complet. Ainsi, d'un cactus m -aire enraciné et non étiqueté contenant p m -gones on peut obtenir une arborescence m -aire non-étiquetée. De plus on peut obtenir une factorisation m -aire

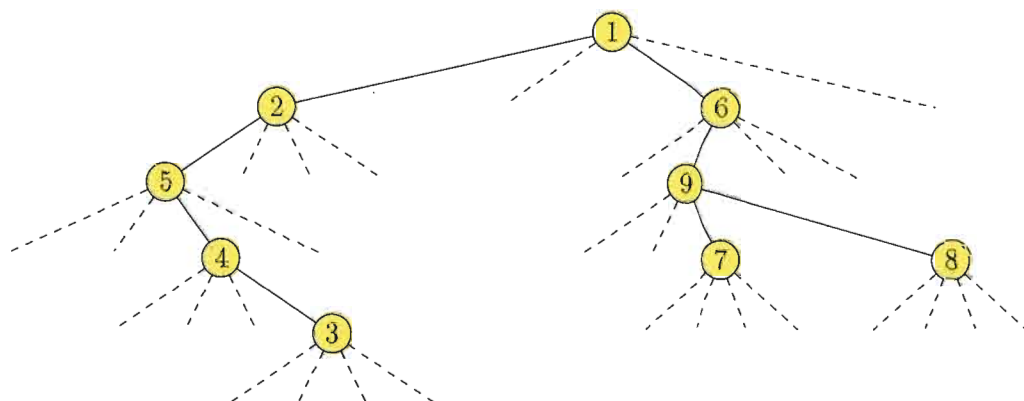
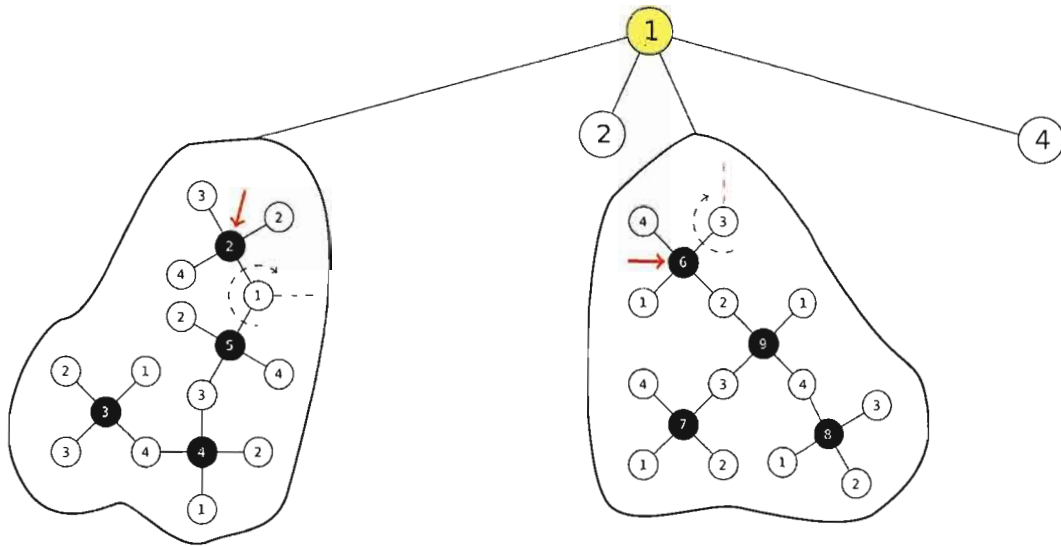
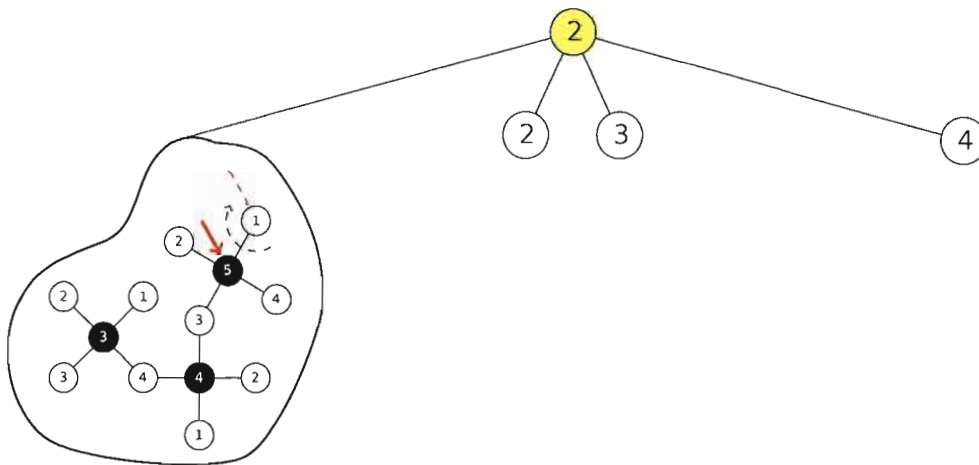


Figure 3.15 Arborescence quaternaire.

du p -cycle α_p .

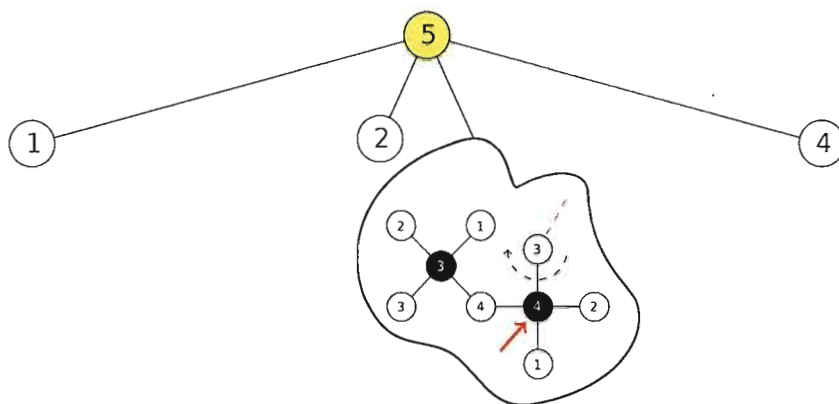


(a) Le sommet distingué 1 est le père de deux sous-structures et deux sommets blancs. La flèche rouge indique le père des sous-structures.

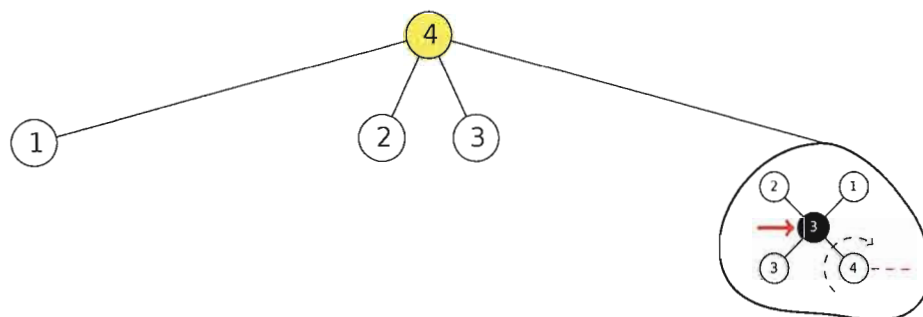


(b) Une fois entré dans la sous-structure, le sommet distingué 2 est le père d'une sous-structure et de trois sommets blancs.

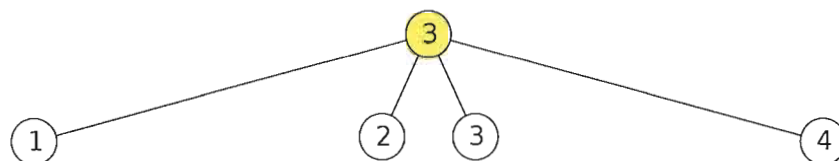
Figure 3.16 Construction d'une arborescence quaternaire.



(c) Une fois entré dans la sous-structure, le sommet distingué 5 est le père d'une sous-structure et de trois sommets blancs.

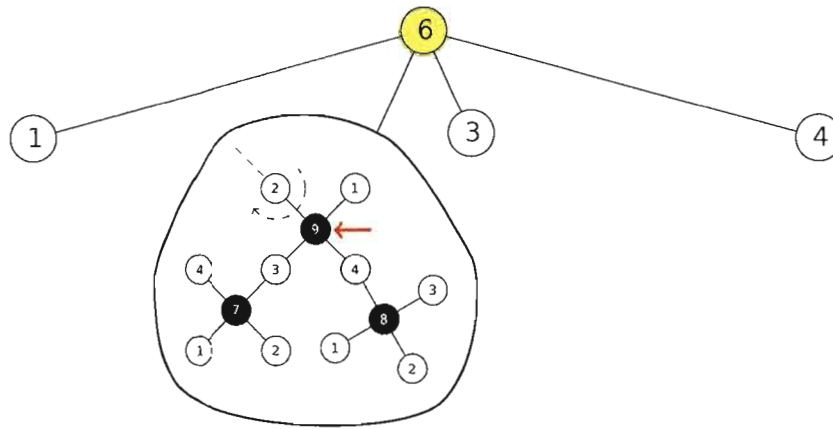


(d) Une fois entré dans la sous-structure, le sommet distingué 4 est le père d'une sous-structure et de trois sommets blancs.

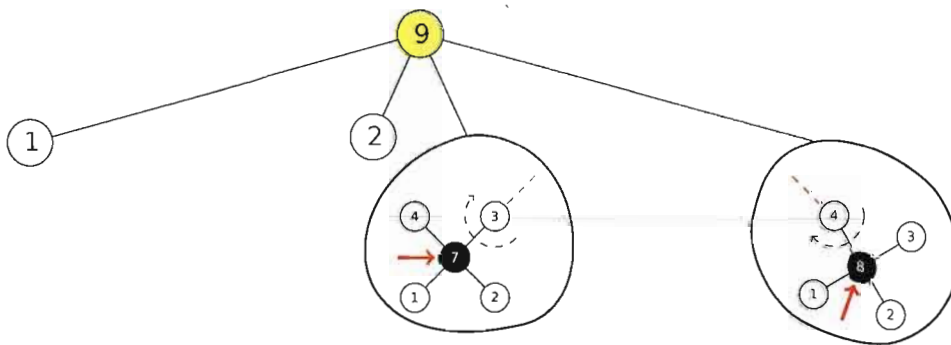


(e) Une fois entré dans la sous-structure, le sommet distingué 3 est le père de quatre sommets blancs.

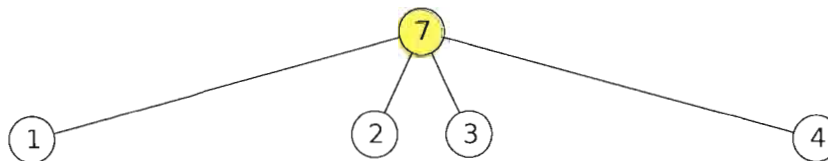
Figure 3.16 Construction d'une arborescence quaternaire (suite).



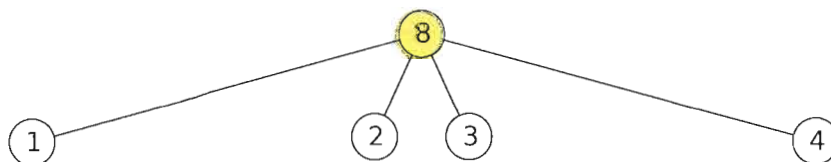
(f) Une fois entré dans la sous-structure, le sommet distingué 6 est le père d'une sous-structure et de trois sommets blancs.



(g) Une fois entré dans la sous-structure, le sommet distingué 9 est le père de deux sous-structures et de deux sommets blancs.



(h) Une fois entré dans la sous-structure, le sommet distingué 7 est le père de quatre sommets blancs.



(i) Une fois entré dans la sous-structure, le sommet distingué 8 est le père de quatre sommets blancs.

Figure 3.16 Construction d'une arborescence quaternaire (suite).

CHAPITRE IV

EXPLORATIONS MAPLE

Ce chapitre est consacré au calcul et au tracé d'images inverses de valeurs critiques et de segments les reliant. De plus, ce chapitre présente des procédures permettant de trouver des polynômes à partir de valeurs critiques. Tous ces calculs s'effectuent en utilisant le logiciel mathématique Maple. On peut trouver dans (Bétréma et Zvonkin, 1993) d'autres exemples d'arbres. Par contre, ceux-ci sont tracés à partir de X-Windows.

4.1 Procédure rootlocus

Afin de calculer aisément l'image inverse de valeurs critiques, ainsi que toutes les valeurs les reliant graphiquement, nous faisons appel à la commande `rootlocus` de Maple. Cette commande permet de tracer le lieu des racines complexes des polynômes de la forme $d(s) + kn(s)$ lorsque k parcourt l'intervalle $[a, b]$. Il suffit d'invoquer la commande `rootlocus(f,s,r)`, dans laquelle $f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, $n(s)$ et $d(s)$ étant des polynômes et $r = a..b$. On veut tracer $\{p^{-1}(w)|w \in [a, b]\} = \{z \in \mathbb{C}|p(z) = w, w \in [a, b]\}$. Or la fonction `rootlocus` prend comme paramètres $(\frac{n(s)}{d(s)}, s, r)$, où r est le domaine sur lequel on prend l'image inverse. Il suffit donc de reparamétriser les entrées. Comme $d(s) + kn(s) = 0$ si et seulement si $d(s) = -kn(s)$ pour $k \in \mathbb{C}$, on prend $n(s) = -1$, alors $d(s) = p(s)$. Donc $\{p^{-1}(w)|w \in [a, b]\} = \text{rootlocus}(\frac{-1}{p(s)}, s, a..b)$. Prenons $z \in \mathbb{C}$ au lieu de s . Alors, $p^{-1}([a, b]) = \text{rootlocus}(\frac{-1}{p(z)}, z, a..b)$. On a que $p(z) = w, w \in [a, b]$, pour $a, b \in \mathbb{C}$, si et seulement si $p(z) = a + t(b - a)$, où $t \in [0, 1]$. Ainsi, $t = \frac{p(z)-a}{b-a}$ pour $t \in [0, 1]$. Nous avons maintenant une commande Maple nous permettant de prendre l'image inverse

d'un segment $[a, b]$,

$$p^{-1}([a, b]) = \text{rootlocus}\left(\frac{-(b-a)}{p(z)-a}, z, 0..1\right).$$

Les cas qui vont nous intéresser, seront lorsque a et b seront des valeurs critiques. Voici trois exemples traités précédemment dans la section 2.1.2.

Exemple 4.1.1. (Figure 4.1)

```
with(plots,rootlocus):
with(orthopoly):
rootlocus((-2/T(6,z)+1),z,0..1,thickness=1,numpoints=100,color=black);
rootlocus((27/256)/(z^4-z^3),z,0..1,thickness=1,numpoints=100,color=black);
rootlocus(-1/z^5,z,0..1,thickness=1,numpoints=100,color=black);
```

La procédure `rootlocus` a par contre une lacune, elle ne permet pas de tracer les courbes complètes lorsque l'on se rapproche d'une singularité.

4.2 Programme servant à calculer et tracer l'image inverse d'un polygone par un polynôme

Afin de tracer un graphe à partir d'un polynôme, on utilise ici Maple. Le programme suivant, composé de plusieurs procédures nous amène à calculer et tracer l'image inverse d'un polygone par un polynôme. Nous avons utilisé un très bel exemple tiré de (Bóna et al., 2000) pour les figures 4.4 et 4.5.

```
with(plots):
```

La procédure nommée `ligne`, trace un segment reliant les nombres complexes a et b .

```
ligne:=proc(a,b);
```

```

plot([Re(a)+t*(Re(b)-Re(a)), Im(a)+t*(Im(a)-Im(b)),t=0..1])
end:

```

La procédure nommée `polygone` trace un polygone fermé dont les sommets sont formés de la liste v .

```

polygone:=proc(v)local m,i,g,
  m:= nops(v);
  for i from 1 to m-1 do
    g(i):= ligne(vi , vi+1);
  od;
  g(m):=ligne(vm , v1);
  display([seq(g(i),i = 1..m-1),g(m)]);
end:

```

Exemple 4.2.1. (Figure 4.2)

```

polygone([i, 3-i, 5+2*i, -2-i, 1+4*i]);

```

La procédure que l'on a nommée `pluspetit`, classe les nombres complexes selon leur arguments. Si les arguments sont égaux, on classe selon leurs modules. Cette procédure force une construction cohérente du polygone pour obtenir un polygone simple.

```

pluspetit:=proc(x,y)
  if argument(x) < argument(y) then return true fi;
  if argument(x) > argument(y) then return false fi;
  return abs(x) < abs(y);
end:

```

Le polygone précédent devient un polygone simple grâce à la procédure `pluspetit`.

Exemple 4.2.2. (Figure 4.3)

```
sort(evalf([i, 3-i, 5+2*i, -2-i, 1+4*i]),pluspetit):
polygone(%);
```

La procédure `Polygone` se sert de la procédure `polygone` pour tracer un polygone dont les sommets sont les valeurs critiques du polynôme P donné en entrée.

```
Polygone:=proc(P) local s,EnsPtsCritiques,v,P1
    P1:=D(P)
    s:=solve(P1(z));
    s:= convert(s,list);
    EnsPtsCritiques:=evalf(allvalues(s));
    v:= map(P, EnsPtsCritiques);
    v:= sort(v,pluspetit);
    return(polygone(sort(v)));
end;
```

Exemple 4.2.3. (Figure 4.4)

```
Polygone(z ↦ 1/8*z^8 -(0.1164942760+0.1953177935*i)z^7
-(0.4143841151-0.2583181732*i)z^6 +(0.4561168248+0.4054547996*i)z^5
+(0.2847172368-0.5012914272*i)z^4 -(0.3350552363+0.3796229823*i)z^3
-(0.1021644393-0.3189705777*i)z^2 +(0.09180613842+0.2961350170*i)z);
```

La procédure `cactus` trace l'image inverse d'un polygone, dont les sommets sont formés de la liste v , par un polynôme p . La valeur du paramètre n contrôle le nombre de points dans la procédure Maple, `rootlocus`.

```
cactus:=proc(p,v,n) local g,m,i,
    m:=nops(v);
    for i from 1 to m-1 do
        g(i):=rootlocus(-(v[i+1]-v[i])/(p-v[i])) ,z,0..1,numpoints=n);
```



```

od;
g(m):=rootlocus(-(v1 - v_m)/(p - v_m)) , z, 0..1, numpoints=n);
display([seq(g(i), i = 1..m - 1), g(m)]);
end:

```

Notons qu'il faut entrer la liste des valeurs critiques en deuxième argument pour évaluer la procédure `cactus`. La procédure nommée `Cactus` se sert de la procédure `cactus` pour tracer l'image inverse d'un polygone par un polynôme P , dont les sommets sont formés de l'ensemble des valeurs critiques du polynôme P . Remarquons que la procédure `Cactus` calcule d'abord les valeurs critiques afin de pouvoir exécuter la procédure `cactus`.

```

Cactus:=proc(P,n) local s, EnsPtsCritiques, v, P1;
  P1:=D(P);
  s:=solve(P1(z));
  s:=convert(s,list);
  EnsPtsCritiques:=evalf(allvalues(s));
  v:= map(P, EnsPtsCritiques);
  v:=sort(v,pluspetit);
  return(cactus(P(z),v,n));
end:

```

Exemple 4.2.4. (Figure 4.5)

```

Cactus(z ↦ 1/8*z8- (0.1164942760+0.1953177935*i)z7
- (0.4143841151-0.2583181732*i)z6+ (0.4561168248+0.4054547996*i)z5
+ (0.2847172368-0.5012914272*i)z4- (0.3350552363+0.3796229823*i)z3
- (0.1021644393-0.3189705777*i)z2+ (0.09180613842+0.2961350170*i)z, 1000);

```

4.3 Procédure Newton pour l'approximation des solutions du système de Couveignes

Nous appelons la bibliothèque `CurveFitting` permettant d'effectuer l'interpolation de Lagrange par `PolynomialInterpolation`.

```
with(curveFitting):
```

La procédure `Approx` prend en entrée deux listes, m , n . Les listes m et n correspondent aux degrés des points critiques $[a_1, a_2, \dots, a_p]$ et $[b_1, b_2, \dots, b_q]$. Cette procédure donne une solution approximative du système d'équations en x_i , M_i du théorème 2.2.10.

```
Approx := proc(m,n)
local k, xPlus, i, j, M, p, q, f, Pol, PolPlus, z, alpha, x;
p:=nops(m);
q:=nops(n);  --          --          ---          --          ---          --
k:=p+q-2;
# La somme des degrés des  $a_i$  doit être égale à celle des  $b_j$ .
if add(m_i,i = 1..p) < > add(n_j,j = 1..q) then RETURN ("mauvaises donnees")
end if;
# Formation du système d'équations construit avec les  $x_i$  et  $M_i$  où  $a_1=0$  et  $b_1=1$ .
M := [seq(m_i,i = 2..p), seq(-n_j,j = 2..q)];
for i to k do f_i := add(M_j * x_j^i, j = 1..k) - n_1 end do;
print([seq(f_i,i = 1..k)]);
map(evalf, solve([seq(f_i,i = 1..k)], [seq(x_i,i = 1..k)]))
end proc
```

On utilise la variable globale `Digits` pour contrôler le nombre de décimales utilisées dans la procédure `Approx`. Exemple : avec $m = [3, 1, 1, 1]$ et $n = [4, 1, 1]$, la première sortie est le système d'équations et la deuxième sortie est la liste des solutions approximatives du système d'équation, où $a_1 = 0, x_1 = a_2, \dots, x_3 = a_4, b_1 = 1, b_2 = x_4$ et $b_3 = x_5$, dans

le but fournir une première approximation à la procédure itérative de **Newton** décrite plus bas.

```
>Digits:=3:
Approx([3,1,1,1],[4,1,1]);
      [x1+x2+x3-x4-x5-4, x12+x22+x32-x42-x52-4, x13+x23+x33-x43-x53-4,
      x14+x24+x34-x44-x54-4, x15+x25+x35-x45-x55-4]
[[x1 = 1.08 - .473 * i, x2 = 1.08 + .473 * i, x3 = 1.44, x4 = -.200 - .245 * i, x5 =
-.200 + .245 * i]]
```

La procédure **Newton** améliore une approximation de la solution pour en produire une « meilleure ». Elle prend comme entrées, les listes m et n , comme plus haut, ainsi que la liste $x = [x_1, x_2, \dots, x_k]$ formée d'une approximation du système d'équations.

```
Newton :=proc(m,n,x)
local k, X, i, j, s, M, p, q, f, Pol, PolPlus, z, alpha, L, L1;
p := nops(m);
q := nops(n);
k := p + q - 2;
if add(mi, i = 1..p) < > add(nj, j = 1..q) or nops(x) < > k then
RETURN ("mauvaises donnees")
end if;
M := [seq(mi, i = 2..p), seq(-nj, j = 2..p)];
L := i → expand(mul(z - xj, j = 1..i - 1) * mul(z - xj, j = i + 1..k));
L1 := i → mul(xi - xj, j = 1..i - 1) * mul(xi - xj, j = i + 1..k);
for i to k do fi := add(Mj * xji, j = 1..k) - n1 end do;
for i to k do Xi := xi - add(fj * coeff(L(i)/L1(i), z, j - 1)/(j * Mi), j = 1..k)
end do;
m, n, [seq(Xi, i = 1..k)]
```

end proc

Exemple 4.3.1. Normalement on utiliserait des milliers de décimales pour déterminer la nature algébrique exacte des solutions à partir de logiciels appropriés, mais pour les besoins de l'illustration on utilise ici cinquante chiffres au total pour exprimer notre réponse. Par contre on utilise soixante chiffres significatifs dans les calculs, afin de stabiliser les résultats au niveau des derniers chiffres significatifs.

```
>Digits:=60:
  Newton([3,1,1,1],[4,1,1],[1.08-.471*i, 1.08+.471*i, 1.44, -.200-.245*i, -.200+.245*i]);
  evalf(%,50);
  [3,1,1,1],[4,1,1],
  [1.0814557177598280687844276324615003387923242730070
  -.47133218701435987719864564750638028647260010478357*i,
  1.0814557177598280687844276324615003387923242730070
  +.47133218701435987719864564750638028647260010478357*i, - ---
  1.4370901692134429941632431220161011614033746114543-0.*i,
  -.19999919763345043413395080653044908050598842126582
  -.24494776569861354654136885865951726091286693270013*i,
  -.19999919763345043413395080653044908050598842126582
  +.24494776569861354654136885865951726091286693270013*i]
```

On réitère Newton jusqu'à ce que ça se stabilise le plus possible.

```
>Newton(%) ;
  evalf(%,50);
  [3,1,1,1],[4,1,1],
  [1.0814599111843515321236707394786010823751935489479
  -.47133348908066171040637709093514077334593302307839*i,
  1.0814599111843515321236707394786010823751935489479
  +.47133348908066171040637709093514077334593302307839*i,
```

```

1.4370801776505271111227490925831517455265691786741
-2.2881530872753229931079825222691505891914232278387*10^(-65)*i,
-.19999999999038491231495471422982304486152186171510
-.24494897426775518543898730469412173597819150146964*i,
-.19999999999038491231495471422982304486152186171510
+.24494897426775518543898730469412173597819150146964*i]

```

```

>Newton(%);
  evalf(%,50);
[3,1,1,1],[4,1,1],
[1.0814599112372680035219181153958058554352479980387
-.47133348908350353037221206791058256280091096004137*i,
1.0814599112372680035219181153958058554352479980387
+.47133348908350353037221206791058256280091096004137*i,
1.4370801775254639929584796743197843119203167510086
-2.2881530872753229931079825222691505891914232279491*10^(-65)*i,
-.1999999999999999999999999884204744430198860459362645698
-.24494897427831780981824253672169960414930058619674*i,
-.1999999999999999999999999884204744430198860459362645698
+.24494897427831780981824253672169960414930058619674*i]

```

```

>Newton(%);
  evalf(%,50);
[3,1,1,1],[4,1,1],
[1.0814599112372680035314352465293211761559462223215
-.47133348908350353037305989770936786650419100002113*i,
1.0814599112372680035314352465293211761559462223215
+.47133348908350353037305989770936786650419100002113*i,
1.4370801775254639929371295069413576476881784008194
-2.2881530872753229931079825222691505891914232285031*10^(-65)*i,

```

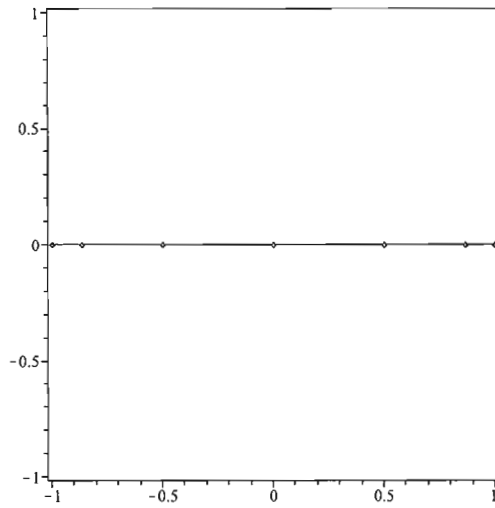
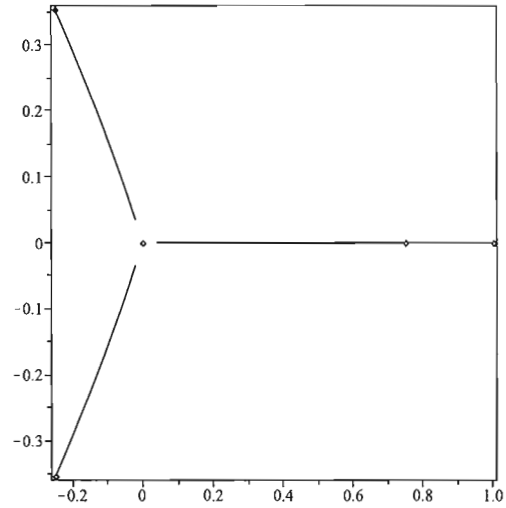
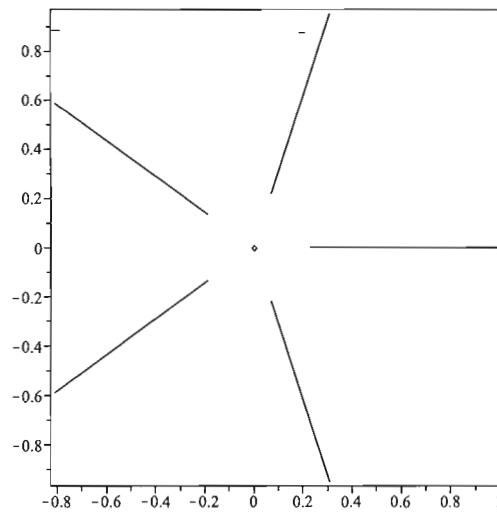

(a) $T(6, z)$.(b) $z^4 - z^3$.(c) z^5 .

Figure 4.1 Arbres tracés d'après la procédure rootlocus appliquée à des polynômes.

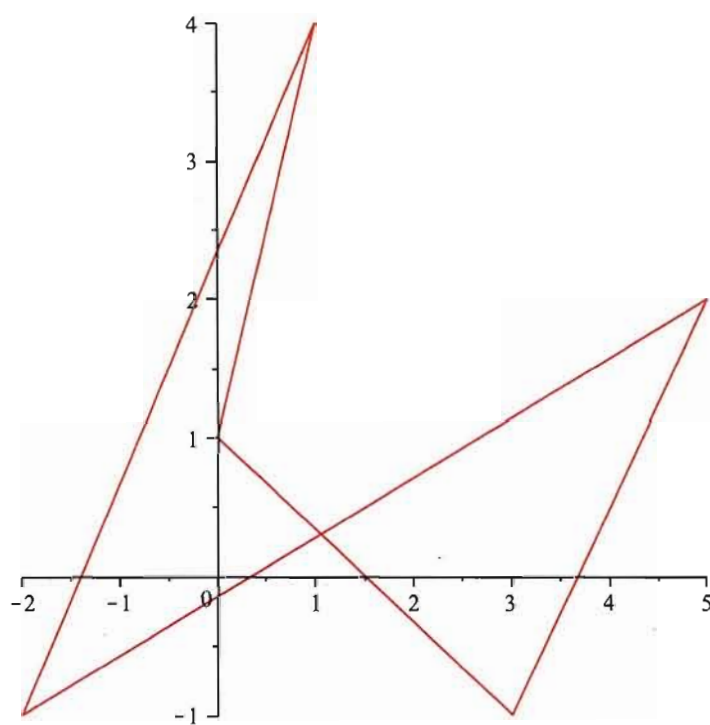


Figure 4.2 Polygone tracé d'après la procédure polygone.

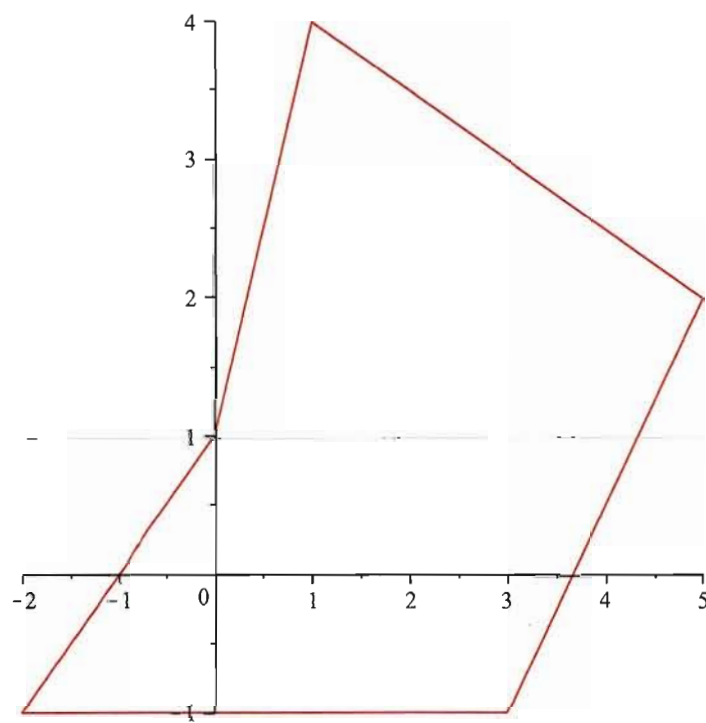


Figure 4.3 Polygone simple tracé par la procédure `polygone`.

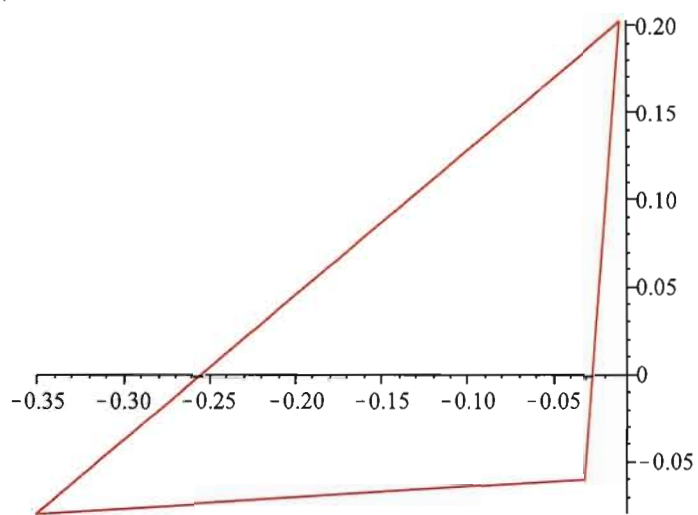


Figure 4.4 Triangle obtenu de la procédure Polygone appliquée à un polynôme.

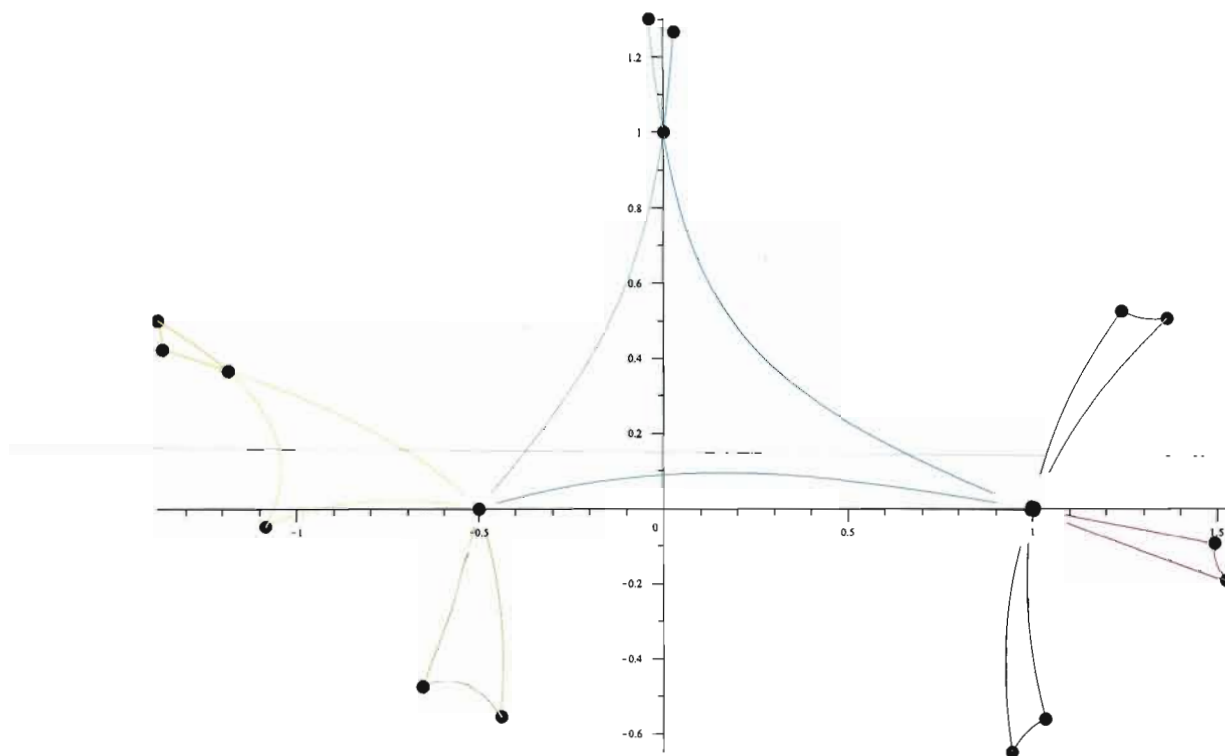


Figure 4.5 Cactus obtenu de la procédure Cactus

CONCLUSION

À l'intérieur de ce mémoire de maîtrise, nous avons établi les liens essentiels à la compréhension des éléments de base de la théorie des dessins d'enfants. D'où vient cette théorie ? Le chapitre sur la topologie algébrique a répondu à cette question. L'image inverse d'un segment nous a donné un graphe (arbre bicoloré), l'image inverse d'une étoile nous a donné une constellation dans le chapitre sur les polynômes. Nous avons aussi analysé les polynômes de Tchebychev et de Shabat, polynômes ayant au plus 2 valeurs critiques, et leur rôle dans la représentation de la « vraie forme » des arbres bicolorés. Nous avons également vu comment trouver et calculer de tels polynômes, avec l'aide de Maple, en ayant comme contrainte la connaissance de départ des valeurs critiques et de leurs multiplicités. Nous avons aussi décrit une mini base de la théorie des espèces, nécessaire pour comprendre le dernier chapitre. Enfin nous avons montré que les cactus sont d'intéressants objets combinatoires et qu'on peut les compter à l'aide de la théorie des espèces tout en établissant des bijections avec d'autres structures.

La théorie présentée peut être poussée très loin dans un cadre beaucoup plus algébrique, en faisant appel notamment à la notion de carte planaire qui généralise les arbres et les cactus. La théorie de Galois offre de très grandes possibilités à cet effet comme le montrent les travaux de Zvonkin (Shabat et Zvonkin, 1994; Lando et Zvonkin, 2004), et Schneps (Schneps, 1994).

Bibliographie

- Bergeron, F., G. Labelle, et P. Leroux. 1994. *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, no 19. Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique (LACIM), UQAM.
- Bétrema, J. et A. Zvonkin. 1993. « La vraie forme d'un arbre ». In *TAPSOFT '93 : theory and practice of software development (Orsay, 1993)*. T. 668, série *Lecture Notes in Computer Science*, p. 599–612, Berlin. Springer.
- Biane, P. 2009. « Shabat polynomials and harmonic measure ». In *Séminaire de probabilités XLII*. T. 1979, série *Lecture Notes in Mathematics*., p. 147–151, Berlin. Springer.
- Bóna, M., M. Bousquet, G. Labelle, et P. Leroux. 2000. « Enumeration of m -ary cacti », *Advances in Applied Mathematics*, vol. 24, no. 1, p. 22–56.
- Bousquet, M. 1999. « Espèces de structures et applications au dénombrement de cartes et de cactus planaires ». Thèse de Doctorat, Montréal, UQAM.
- Couveignes, J.-M. 1994. « Calcul et rationalité de fonctions de Belyï en genre 0 », *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)*, vol. 44, no. 1, p. 1–38.
- Goulden, I. P. et D. M. Jackson. 1992. « The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group », *European Journal of Combinatorics*, vol. 13, no. 5, p. 357–365.
- Grothendieck, A. 1997. « Esquisse d'un programme ». In *Geometric Galois actions, 1*. T. 242, série *London Mathematical Society Lecture Note Series*., p. 5–48, Cambridge. Cambridge Univ. Press.

Hurwitz, A. 1891. « Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten », *Math. Ann.*, vol. 39, no. 1, p. 1–60.

Husimi, K. 1950. « Note on Mayers' theory of cluster integrals », *The Journal of Chemical Physics*, vol. 18, p. 682–684.

Joyal, A. 1981. « Une théorie combinatoire des séries formelles », *Adv. in Math.*, vol. 42, no. 1, p. 1–82.

Lando, S. K. et A. K. Zvonkin. 2004. *Graphs on surfaces and their applications*. T. 141. Berlin : Springer-Verlag. With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II.

Mac Lane, S. 1998. *Categories for the working mathematician*. T. 5, série *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag, second édition.

Munkres, J. R. 1999. *Topology*. Upper Saddle River : Prentice Hall.

Schneps, L. 1994. « Dessins d'enfants on the Riemann sphere ». In *The Grothendieck theory of dessins d'enfants (Luminy, 1993)*. T. 200, série *London Mathematical Society Lecture Note Series*, p. 47–77, Cambridge. Cambridge Univ. Press.

Shabat, G. et A. Zvonkin. 1994. « Plane trees and algebraic numbers ». In *Jerusalem combinatorics '93*. T. 178, série *Contemporary Mathematics*, p. 233–275, Providence, RI. Amer. Math. Soc.